فصل ۱ ماتریس و کاربردها

(ابتدا درسنامه مربوط به این فصل را در بخش درسنامه مطالعه نمایید.)

قسمت اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

تساوی، جمع و تفاضل ماتریس‌ها

ماتریس اگر خوب مطالعه شود، بهترین نتیجه را در این بخش خواهید گرفت و همهٔ تست‌های آن را به درستی در کنکور جواب خواهید داد.

۱☆. ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با فرض $a_{ij}=\begin{cases} i-j & i\ge j \\ j & j>i \end{cases}$ تعریف می‌شود، مجموع درایه‌های آن کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۲. اگر $A=[ij]_{۳\times۲}$ و $B=[(i-j)^{۲}]_{۲\times۲}$، آن‌گاه مقدار $a_{۱۱}b_{۲۲}+b_{۲۱}a_{۳۲}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳☆. اگر $A=\begin{bmatrix} x-۲y & ۱ \\ z^{۳} & -۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۳ & x+۲y \\ -۸ & -۴ \end{bmatrix}$ در صورتی‌که $A=B$ باشد، آن‌گاه $x+y+z$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۰

۴. اگر $A=\begin{bmatrix} x-۳y & x \\ ۱ & y \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۶-y \\ ۱ & ۶-x \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} -۴ & -۸ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ با فرض $A=B$ حاصل $۲B+C$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$

۵☆. اگر برای ماتریس‌های A و B داشته باشیم $A+B=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $A-B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ آن‌گاه درایهٔ واقع بر سطر اول و ستون دوم ماتریس A کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۶☆. اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$، $a_{ij}=\begin{cases} ۳i+۴j & i\le j \\ ۲i-j & i>j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲x+y & ۴a+b-۷ \\ a-b+۱ & ۳x+۵y \end{bmatrix}$ باشد آن‌گاه با فرض $A=B$ حاصل $(۳x+۲y-۳a)^{b}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۹ ۴) ۲۵

۷☆. اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$، $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i=j \\ i-j & i\ne j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه با فرض این‌که مجموع درایه‌های قطر اصلی و فرعی ماتریس $xA+yB$ برابر باشند، حاصل $\frac{x}{y}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $-\frac{۳}{۸}$

۸☆. اگر $\begin{bmatrix} x^{۲} & y^{۲} \\ z^{۴} & ۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x & ۱ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۴} & ۲y \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}$، آن‌گاه بیش‌ترین مقدار xyz کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) -۱ ۴) صفر

۹☆. اگر $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۸ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۵ \\ ۷ & ۶ & ۰ \end{bmatrix}$ و ماتریس B چنان باشد که $A+B=I$، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی B کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۵

دانش‌آموزان عزیز! در صورت کمبود وقت حتماً به تست‌های دارای علامت ☆ پاسخ دهید. تست‌های دارای علامت ★ کمی دشوارتر هستند.

۱۰. ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ با شرط $a_{ij}=\begin{cases}3 & i=j\\ \sin\pi(i+j) & i\neq j\end{cases}$ کدام است؟

۱) ماتریس صفر ۲) ماتریس همانی ۳) ماتریس سطری ۴) ماتریس اسکالر

۱۱. اگر $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ و $xA+yB=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ آن‌گاه مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ x و y به‌دست نمی‌آید.

۱۲. اگر $A=\begin{bmatrix}1 & b\\ 3 & -1\\ 2 & a\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}a & 3\\ b & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ و $C=A+B$ باشد و $c_{11}=2c_{22}$ ، $c_{12}-2=c_{31}$ آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۳ ۴) ۲-

۱۳. اگر $C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & -1\end{bmatrix}$، $D=\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 2\end{bmatrix}$ و $C+2D=3I$، آن‌گاه مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

۱۴. اگر $A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 4 & -2\end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $B=A+2A+3A+\cdots+nA$ (n عددی طبیعی است) کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $n(n+1)$ ۴) $\frac{n}{2}(n+1)$

۱۵. ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ با شرط $a_{ij}=\begin{cases}3-a_{ij} & i\neq j\\ -a_{ij} & i=j\end{cases}$ مفروض است. مجموع درایه‌های ماتریس $A-\frac{1}{2}I$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۷/۵ ۴) ۸/۵

۱۶. ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ با شرط $a_{ij}=\begin{cases}2i-a_{ji} & i<j\\ 6-a_{ji} & i=j\end{cases}$ مفروض است. مجموع درایه‌های آن کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۰ ۳) ۱۷ ۴) ۲۴

ضرب ماتریس‌ها، ماتریس‌های تعویض پذیر

درست نوشتن درایه‌های ماتریس و تسلط بر محاسبات ریاضی در این‌ها بسیار مهم است. با کمی دقت اغلب سؤال‌های این بخش را پاسخ خواهید داد.

۱۷. اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & b\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}-2a & 3\\ 1 & c\end{bmatrix}$ و $AB=\begin{bmatrix}0 & -5\\ -6 & -1\end{bmatrix}$، آن‌گاه abc کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۸- ۳) ۱۶- ۴) ۲-

۱۸. اگر $A=\begin{bmatrix}x & x\\ y & y\end{bmatrix}$ و $A^2=A$، آن‌گاه $x+y$ کدام است؟ $(xy\neq 0)$

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹. اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 4}$، $a_{ij}=i-j$ و $B=[b_{ij}]_{4\times 6}$، $b_{ij}=2i+3j$ آن‌گاه با فرض $C=AB$، c_{34} کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۶ ۴) ۳۰

۲۰. اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ a^2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ a\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ و $AC=B$ باشد، آن‌گاه مجموع مقادیر a کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) صفر

۲۱. اگر $B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$ و $A\times B=C$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۲. اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}3 & -9\\ 6 & 12\\ 0 & 15\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}4 & -1 & 5\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$، آن‌گاه با فرض $D=(2A-\frac{1}{3}B)C$، d_{22} کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) ۶- ۴) ۲-

۲۳. اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$، آن‌گاه ماتریس A^2B+BAB کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}6 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}2 & 6\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}3 & 1\\ -\frac{3}{2} & \frac{7}{4}\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-3 & -1\\ -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4}\end{bmatrix}$

۲۴. با توجه به تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$، مقدار b کدام است؟

۱) $\cos(\alpha-\beta)$ ۲) $\sin(\alpha-\beta)$ ۳) $\sin(\beta-\alpha)$ ۴) $\sin(\alpha+\beta)$

۲۵. جواب‌های معادلهٔ $\begin{bmatrix}x & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 1\end{bmatrix}=0$ کدام‌اند؟

۱) $-1,-3$ ۲) $1,-3$ ۳) $-1,3$ ۴) $1,3$

۲۶. اگر ماتریس $A_{2\times 2}$ چنان باشد که $A\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-b\\ -a\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $A^2\begin{bmatrix}-1\\ -2\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-1\\ -2\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-2\\ -1\end{bmatrix}$

۲۷. کدام گزینه می‌تواند $A\times B-B\times A$ باشد؟

۱) $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 7\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}3 & 0\\ 3 & -3\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}5 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix}$

۲۸. ماتریس $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}\times\cdots\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 7 & 1\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 28 & 1\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 21 & 1\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 36 & 1\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 25 & 1\end{bmatrix}$

۲۹. اگر $A+I=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ و $B+2I=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ آن‌گاه حاصل $AB+2A+B+2I$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}7 & 2\\ 6 & 6\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-7 & -2\\ -6 & 6\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}7 & -2\\ -6 & 6\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-7 & 2\\ 6 & -6\end{bmatrix}$

۳۰. ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ را با فرض $a_{ij}=\begin{cases}i & i>j\\ j & i\le j\end{cases}$ در نظر می‌گیریم. مجموع درایه‌های ماتریس A^2 چقدر بیش‌تر از مجموع درایه‌های ماتریس A است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

۳۱. اگر $AB=\begin{bmatrix}6 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$، $BC=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & -2\end{bmatrix}$ و $CA=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 4\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $(ABC)^2$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-7 & -2\\ 4 & -4\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-3 & -4\\ 3 & -8\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}0 & -2\\ 18 & -11\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-12 & 1\\ -36 & 0\end{bmatrix}$

۳۲. اگر $A=\begin{bmatrix}5 & a\\ b & -2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ و ماتریس $A\times B$ قطری باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۳. به ازای کدام مقدار x, y ماتریس $\begin{bmatrix}x & -1 & 4\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & 0\\ y & 1\end{bmatrix}$، یک ماتریس قطری است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۸)

۱) $x=1, y=-7$ ۲) $x=2, y=-7$ ۳) $x=2, y=-5$ ۴) $x=1, y=-5$

۳۴. اگر $A=\begin{bmatrix}-4 & p & -2\\ 4 & 2 & q\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}q & -4\\ 2 & 2q\\ 4p & 6\end{bmatrix}$ و AB یک ماتریس قطری باشد، آن‌گاه $q-p$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۵. اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ و $A^2=\alpha A+\beta I$ باشد، آن‌گاه زوج‌مرتب (α,β) کدام است؟

۱) $(-1,6)$ ۲) $(1,-6)$ ۳) $(-1,-6)$ ۴) $(1,6)$

۳۶. اگر $A=\begin{bmatrix}x&-1&-x\\0&0&4\\y&z&z\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}2z&\frac{1}{2}&2\\2z&0&-4y\\0&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$ و ماتریس AB به ازای $y\in\mathbb{Z}$ ماتریس اسکالر باشد، مقدار xy کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۱۴۰۱)

۱) -1 ۲) -2 ۳) 1 ۴) 2

۳۷. اگر $\begin{bmatrix}x&0&0\\y&t&0\\z&u&r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y&z\\0&t&u\\0&0&r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2&1\\a&4&2\\b&c&4\end{bmatrix}$ و همهٔ پارامترها مثبت باشند، آن‌گاه r کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\sqrt{3}$

۳۸. از رابطهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix}x&2x&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1&1\\4&0&-2\\1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2x\\-1\end{bmatrix}=0$ عدد غیرصفر x، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۸)

۱) $\frac{2}{9}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{3}{5}$

۳۹. حاصل $\begin{bmatrix}0&0&1\\1&1&2\\2&2&3\\3&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1\\2&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}5\\15\\25\\35\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}5\\10\\20\\30\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}5\\15\\25\\30\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}5\\10\\15\\20\end{bmatrix}$

۴۰. اگر $A+B=\begin{bmatrix}2&-2&2\\2&1&1\\2&0&2\end{bmatrix}$ و $AB+BA=\begin{bmatrix}2&-3&3\\5&-7&5\\4&1&3\end{bmatrix}$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A^2+B^2 کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

۴۱. ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 2 & i\neq j\end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های A^2-4A کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۶)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۲

۴۲. اگر $A=\begin{bmatrix}1&x&0\\0&0&y\\0&0&z\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\x&0&0\\0&y&z\end{bmatrix}$ و ستون سوم ماتریس A^2B برابر $\begin{bmatrix}-6\\2\\-1\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه $x+y+z$ کدام است؟

۱) -6 ۲) 4 ۳) -4 ۴) 5

۴۳. اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&a\\0&b&0\\0&c&0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&b&c\\a&0&0\end{bmatrix}$ و ستون دوم ماتریس A^2-B برابر $\begin{bmatrix}3\\2\\6\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۴. اگر $A=\begin{bmatrix}1&3&5\\7&22&36\\10&31&52\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10&17&15\\4&20&17\\302&153&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}28&-1&-2\\-4&2&-1\\-3&-1&1\end{bmatrix}$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی A کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۶ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸

۴۵. اگر $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&2\\3&3&4\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}6&-1&-1\\-2&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های A^2B^3 کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱ ۳) ۱۹ ۴) ۲

۴۶. اگر $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\-1&-2&-1\\1&1&0\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}3&6&-2\\-2&-4&1\\-2&-3&0\end{bmatrix}$ ، p و q دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه ماتریس pA^2+qB^2 همواره کدام است؟

۱) ماتریس صفر ۲) ماتریس ستونی ۳) ماتریس اسکالر ۴) ماتریس همانی

۴۷. اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\a&2&0\\b&c&4\end{bmatrix}$ و $AB=I$، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A+B$ کدام است؟

۱) ۸/۵ ۲) ۸/۷۵ ۳) ۸/۲۵ ۴) ۸

۴۸. اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&3\\1&0&1\end{bmatrix}$ و $AB=I$، آن‌گاه درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس B کدام است؟

۱) -4 ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) -3

۴۹. اگر $A=\begin{bmatrix}1&3&6&24\\\frac{1}{3}&1&2&8\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&1&4\\\frac{1}{24}&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&1\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C^2 کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴ (سراسری ریاضی- ۹۷)

۵۰. فرض کنید $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}=A$. مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس A، کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۱۴۰۰)

۱) ۱۲ ۲) ۱۷
۳) ۱۹ ۴) ۲۱

۵۱. فرض کنید $\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}=A$ مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۱۴۰۰)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۵۲. اگر برای دو ماتریس مربعی هم‌مرتبهٔ A و B رابطهٔ $A\times B=-2B\times A$ برقرار باشد، ماتریس $(A+B)^2$ کدام است؟

۱) $A^2+A\times B+B^2$ ۲) $A^2-B\times A+B^2$ ۳) $A^2-A\times B+B^2$ ۴) A^2+B^2

۵۳. اگر $A=\begin{bmatrix}-1&3\\1&-1\end{bmatrix}$، چند ماتریس مانند $B=\begin{bmatrix}1&a\\2&b\end{bmatrix}$ وجود دارد که A با B تعویض‌پذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۵۴. اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&-2\\0&-1&1\end{bmatrix}$، $X=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ و $AX=3X$، آن‌گاه حاصل $\frac{a-b+c}{c}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۳

۵۵. اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&-1\\3&1\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}a&1\\c&5\end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند، آن‌گاه $a+c$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

۵۶. اگر $(A+I)^2=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$ و $(A-I)^2=-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی $A_{2\times 2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\sqrt{2}$

۵۷. اگر A و B دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند و $AB=\begin{bmatrix}5&1\\1&5\end{bmatrix}$ آن‌گاه A^2B^2 کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}25&5\\5&25\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}26&10\\10&26\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}10&26\\26&10\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}5&25\\25&5\end{bmatrix}$

۵۸. اگر $A=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2&b&a\\3&a&2\\a&-2&b\end{bmatrix}$ و $B=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2&3&a\\b&a&-2\\a&2&b\end{bmatrix}$ و $AB=I$، آن‌گاه مقادیر a و b به ترتیب کدامند؟

۱) ۶ و ۳ ۲) ۶ و -3 ۳) -6 و -3 ۴) -6 و ۳

۵۹. اگر $A^2=-A-I$، آن‌گاه حاصل $A(A+2I)$ کدام است؟

۱) $A-I$ ۲) $A+I$ ۳) $-A+I$ ۴) $2A-I$

۶۰. اگر $A=\begin{bmatrix} a-2 & 4 & -7 \\ b & 0 & b+2 \\ 7 & a & 0 \end{bmatrix}$ و به ازای هر i و j رابطه $a_{ij}=-a_{ji}$ باشد. آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی A^2 کدام است؟

۱) -120 ۲) -130 ۳) -138 ۴) -200

۶۱. اگر A، B و C ماتریس‌های مربع باشد به طوری‌که $A+B=I$ و $A=BC$، آن‌گاه $AC-C$ کدام است؟

۱) $-B$ ۲) $-C$ ۳) $-A$ ۴) $-I$

۶۲. اگر A، B و C ماتریس‌های مربع باشد به طوری‌که $A+B=I$ و $A=BC=CB$، آن‌گاه حاصل $AC-CA$ کدام است؟

۱) I ۲) B ۳) $\overline{O}$ ۴) A

۶۳. اگر برای ماتریس A داشته باشیم $A^2+3A+I=\overline{O}$ و ماتریس‌های B و C چنان باشند که $2A=B^3+C^3$، آن‌گاه $B-C$ کدام است؟

۱) A ۲) $2A$ ۳) $A+2I$ ۴) $A-2I$

۶۴. اگر A و B دو ماتریس 2×2 و $AB=B$ و $BA=A$ باشد آن‌گاه $(A+B)^3$ کدام است؟

۱) $8A$ ۲) $2A+6B$ ۳) $8B$ ۴) $4(A+B)$

۶۵. اگر برای ماتریس 2×2، A داشته باشیم $A^2=I-A$ آن‌گاه حاصل $A^2(A+I)^2$ کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) $\overline{O}$ ۴) $-A$

۶۶. اگر برای ماتریس 2×2، A داشته باشیم $A^2=\overline{O}$، آن‌گاه $A(I-A)^3$ کدام است؟

۱) A ۲) $-A$ ۳) $\overline{O}$ ۴) I

۶۷. اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ و $A^3=mA+nI$ آن‌گاه n^m کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۴) -2

۶۸. اگر A و B ماتریس‌های مربعی 2×2 باشند به طوری‌که $A+B=2AB$، آن‌گاه حاصل $A^2+B^2+AB+BA$ کدام است؟

۱) $(AB)^2$ ۲) $4(AB)^2$ ۳) $(BA)^2$ ۴) $4(BA)^2$

۶۹. اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، به طوری‌که $A+B+AB=\overline{O}$ آن‌گاه $(A+I)(B+I)$ کدام است؟

۱) $2AB$ ۲) $2BA$ ۳) O ۴) I

۷۰. اگر A ماتریس مربعی باشد، به طوری‌که $A^2-A-2I=\overline{O}$ آن‌گاه حاصل A^3+I کدام است؟

۱) $3A+3I$ ۲) $2A+2I$ ۳) $3A-3I$ ۴) $2A-2I$

۷۱. اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ آن‌گاه حاصل $A^3-7A^2+2A+4I$ کدام است؟

۱) $4I$ ۲) $3I$ ۳) $5I$ ۴) $6I$

۷۲. اگر $A^2=A$ باشد و $AB=I$، آن‌گاه حاصل A^3B^2 کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) B ۴) $\overline{O}$

۷۳. اگر A و B ماتریس‌های مربعی 2×2 باشند، به طوری‌که $AB+BA=I$ آن‌گاه حاصل A^2B-BA^2 کدام است؟

۱) I ۲) $\overline{O}$ ۳) A ۴) B

۷۴. A یک ماتریس 2×2 است، به طوری‌که $A^2+3A-I=O$ می‌باشد و اگر $AU=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ به طوری‌که $U=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ در این‌صورت A^3U کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 7 \\ -10 \end{bmatrix}$

۷۵. اگر $AB=\lambda BA$، آن‌گاه حاصل $(AB)^2-A^2B^2$ کدام است؟

۱) λA^2B^2 ۲) $\frac{\lambda-1}{\lambda}A^2B^2$ ۳) $\frac{1-\lambda}{\lambda}A^2B^2$ ۴) $\overline{O}$

۷۶. اگر $AB-BA=2I$، آن‌گاه حاصل $(A+I)(B-I)-(B-I)(A+I)$ کدام است؟

۱) $2I$ ۲) $-2I$ ۳) I ۴) $\overline{O}$

توان ماتریس‌ها

در این مبحث با توجه به خواص ضرب ماتریس‌ها و نتیجه‌گیری صحیح استقرایی می‌توانیم بدون دردسر زیاد، توان‌های بالای ماتریس‌ها را به‌دست آوریم.

۷۷. اگر $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های A^5 کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۶۴ ۳) ۱۲۸ ۴) ۱۶

۷۸. اگر $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$، آن‌گاه A^{100} کدام است؟

۱) A ۲) $\frac{1}{2^{100}}A$ ۳) $2^{100}A$ ۴) I

۷۹. اگر $A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}$، آن‌گاه کم‌ترین مقدار n که به ازای آن $A^n=I$ است، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۸۰. اگر $A=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}$ آن‌گاه کم‌ترین مقدار n که به ازای آن $\frac{1}{2^{8-n}}(A-A^2)^n$ برابر I باشد، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۱. اگر $A=\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی A^n کدام است؟

۱) a^n ۲) $2a^n$ ۳) na^n ۴) صفر

۸۲. اگر $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&7\end{bmatrix}$ و $B=A^{50}$ آن‌گاه b_{12} کدام است؟

۱) $\frac{7^{50}-1}{3}$ ۲) $\frac{7^{50}-2}{3}$ ۳) $\frac{7^{50}+1}{3}$ ۴) $\frac{7^{50}+2}{4}$

۸۳. اگر $A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ و $B=A+A^2+A^3+\cdots+A^{2022}$ آن‌گاه B کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) $2022A$ ۴) $A-I$

۸۴. اگر $A=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}$ آن‌گاه A^{2010} کدام است؟

۱) I ۲) A ۳) $\bar{O}$ ۴) $-I$

۸۵. اگر $M=\begin{bmatrix}2\cos^2\theta&\sin 2\theta\\\sin 2\theta&2\sin^2\theta\end{bmatrix}$، آن‌گاه M^3 کدام است؟

۱) M ۲) $2M$ ۳) $3M$ ۴) $4M$

۸۶. اگر $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$، آن‌گاه ماتریس $A^8\times B^9$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}1&8\\9&7\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}1&8\\9&71\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}1&8\\9&72\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}1&9\\8&73\end{bmatrix}$

۸۷. اگر A ماتریس مربعی 2×2 و $A^2-A+I=\bar{O}$ باشد، آن‌گاه ماتریس A^{30} کدام است؟

۱) I ۲) $-I$ ۳) A ۴) $-A$

۸۸. اگر $A^2=B^2=I$، $AB=\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}$ و $BA=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $((A+B)(A-B))^{1401}$ کدام است؟

۱) I ۲) $-I$ ۳) $\bar{O}$ ۴) $2I$

۸۹. اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\1&0&0\end{bmatrix}$، آن‌گاه درایهٔ نظیر سطر سوم و ستون اول A^3 کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۹۰. اگر $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ و $(A+I)^6=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$، آن‌گاه $a-b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۱ ۴) ۳۶

۹۱. اگر $A^2 = \overline{O}$، حاصل $(I-A)^4(I+A)^5$ کدام است؟

۱) $I+A$ ۲) $I-A$ ۳) $2A$ ۴) O

۹۲. اگر $A^2 = A$ باشد، آن‌گاه حاصل $(I+A)^4$ کدام است؟

۱) $15A$ ۲) $16A$ ۳) $I+15A$ ۴) $I+16A$

۹۳. اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$، آن‌گاه A^{40} کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 2^{40} & 0 \\ 0 & 2^{40} \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 2^{39} & 2^{39}\sqrt{3} \\ -2^{39}\sqrt{3} & 2^{39} \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -2^{39} & 2^{39}\sqrt{3} \\ -2^{39}\sqrt{3} & -2^{39} \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 2^{39}\sqrt{3} & -2^{39} \\ 2^{39} & 2^{39}\sqrt{3} \end{bmatrix}$

۹۴. اگر A و B دو ماتریس 2×2 و $AB = A$ و $BA = B$ باشد حاصل $A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{1401}$ کدام است؟

۱) $1400A$ ۲) $1401A$ ۳) $1400B$ ۴) $1401A$

۹۵. اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ و $C = AB$، آن‌گاه مجموع درایه‌های $C^n + A^2$ کدام است؟ (n عدد طبیعی)

۱) صفر ۲) $2+2(-1)^n$ ۳) $(-1)^n+1$ ۴) $2(-1)^n+3$

۹۶. اگر داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ و ماتریس B چنان باشد که درایه‌های زیر قطر اصلی آن صفر باشد و $AB = I$ باشد آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۰ ۳) ۱۸ ۴) ۱۵

۹۷. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی A^n برابر ۲۴۴ باشد آن‌گاه n کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۴

۹۸. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A^n کدام است؟

۱) $-n$ ۲) صفر ۳) $2-n$ ۴) $1-n$

۹۹. اگر $A^2 = 2A - I$ آن‌گاه $A^{10} = aA + bI$. زوج مرتب (a, b) کدام است؟

۱) $(10, -9)$ ۲) $(10, 9)$ ۳) $(9, -10)$ ۴) $(9, 10)$

۱۰۰. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^n$ (n عدد طبیعی) آن‌گاه مجموع درایه‌های B کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}(n-n^2)$ ۲) $2n-2n^2$ ۳) $2n-n^2$ ۴) $n-n^2$

۱۰۱. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $B = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{200}$ کدام است؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۳۹۸ ۴) ۳۹۹

۱۰۲. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt[5]{2} & 0 \\ \sqrt[5]{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[5]{4} \end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی A^{10} کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۴۸ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۹۲

۱۰۳. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ و I ماتریس همانی مرتبهٔ ۳ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A^3 - 2A^2 + 5I$ کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۱۰۴. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی A^4 کدام است؟

۱) ۹۶ ۲) ۹۷ ۳) ۹۹ ۴) ۹۸

۱۰۵. اگر $A=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس A^4، کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۹)

۱) $\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}$

۱۰۶. اگر $A=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}$، ماتریس A^4 کدام می‌باشد؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۷)

۱) درایه‌های زیر قطر اصلی آن صفر است.
۲) درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر است.
۳) قطری غیرهمانی
۴) همانی

۱۰۷. اگر $A=\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&0&4\\1&0&2\end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول A^3، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۹)

۱) $\begin{bmatrix}30&6&64\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}30&6&78\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}24&8&86\end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix}30&6&86\end{bmatrix}$

۱۰۸. اگر $A=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۱۴۰۱)

۱) $\begin{bmatrix}1&-1&0\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}9&12&16\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}1&0&-2\end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix}9&5&-7\end{bmatrix}$

۱۰۹. اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های A^{11} از مجموع درایه‌های قطر اصلی چقدر بیش‌تر است؟

۱) 2^9
۲) 2^{10}
۳) 2^{11}
۴) 2^{12}

۱۱۰. اگر $A=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ آن‌گاه $A^{55}+A^{42}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$

۱۱۱. اگر $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ آن‌گاه A^{100} کدام است؟

۱) A
۲) $-A$
۳) I
۴) $3I$

۱۱۲. اگر $A=[a_{ij}]_{3\times3}$، $a_{ij}=|i-j|+j-i$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $B=A+A^2+A^3+\cdots+A^{1401}$ کدام است؟

۱) ۱۶
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۴۰۱

۱۱۳. اگر $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\3&0&0\end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $\frac{1}{36^6}A^{40}$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۳۶
۳) $\frac{1}{6}$
۴) $\frac{1}{36}$

۱۱۴. اگر $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$ و $A^{100}=2^K A^2$ باشد آن‌گاه K کدام است؟

۱) ۱۰۰
۲) ۹۹
۳) ۹۸
۴) ۱۰۱

۱۱۵. اگر $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A^{n+1} (n عدد طبیعی) کدام است؟

۱) $2^{n+1}+1$
۲) $2^{n+2}+1$
۳) 2^n-1
۴) $2^{n-1}+1$

۱۱۶. اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۱&۱&۰\\۱&۱&۱\end{bmatrix}$ و $A^{۴۹}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۴۹&۱&۰\\x&۴۹&۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه x کدام است؟

۱) ۱۲۳۵ ۲) ۱۲۲۵ ۳) ۱۱۲۵ ۴) ۱۲۷۵

۱۱۷. اگر $A=\begin{bmatrix}۰&-۱\\۱&۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $۲I+A+A^{۲}+\cdots+A^{۲۴}+A^{۲۵}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۸. اگر $A=\begin{bmatrix}۳&۰&۸\\۳&-۱&۶\\-۲&۰&-۵\end{bmatrix}$، آن‌گاه $(A^{۲}+۲A)^{۱۰}$ کدام است؟

۱) I ۲) $-I$ ۳) A ۴) $-A$

۱۱۹. اگر $A=\begin{bmatrix}۵&-۴&۲\\۲&-۱&۱\\-۴&۴&-۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه $(A^{۲}-۲A+۲I)^{۶}$ کدام است؟

۱) I ۲) $\overline{O}$ ۳) A ۴) $-I$

۱۲۰. اگر $A=\begin{bmatrix}۰&۳&۴\\۱&-۴&-۵\\-۱&۳&۴\end{bmatrix}$، آن‌گاه $(A^{۳}+۳I)^{۴}$ کدام است؟

۱) $۲۷I$ ۲) $۸۱I$ ۳) $۱۶I$ ۴) $۶۴I$

۱۲۱. اگر $A=\begin{bmatrix}۰&-۱&-۲\\-۱&۰&-۲\\۱&۱&۳\end{bmatrix}$، با فرض $(A-kI)^{n}=\overline{O}$، آن‌گاه کم‌ترین مقدار $k+n$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۲. اگر $۳A=۴A^{۲}$، آن‌گاه ماتریس $A^{۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}A$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}A$ ۳) $\frac{۲۷}{۶۴}A$ ۴) $\frac{۸۱}{۲۵۶}A$

۱۲۳. اگر $A^{۲}=A$ باشد، آن‌گاه حاصل $(A-\frac{I}{۲})^{۶}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶۴}I$ ۲) $\frac{۱}{۳۲}I$ ۳) $\frac{۱}{۳۲}A$ ۴) $\frac{۱}{۶۴}A$

۱۲۴. اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\-۲&۱&۰\\-۱&۰&۱\end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های $(۲I-A)^{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) ۳۰۱ ۲) ۳۰۲ ۳) ۳۰۰ ۴) ۳۰۳

۱۲۵. اگر $A=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}&\frac{\sqrt{۲}}{۲}\\-\frac{\sqrt{۲}}{۲}&-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۲}}{۲}&\frac{\sqrt{۲}}{۲}\\-\frac{\sqrt{۲}}{۲}&\frac{\sqrt{۲}}{۲}\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}&-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\\\frac{\sqrt{۳}}{۲}&\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$، آن‌گاه $(ABC)^{n}=I$، کم‌ترین مقدار n کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

قسمت دوم: وارون ماتریس و دترمینان

دترمینان ۲×۲

محاسبهٔ دترمینان ۲ × ۲ ساده می‌باشد. در این مبحث دانستن خواص دترمینان و دقت در محاسبه بسیار مهم است.

۱۲۶. اگر $\begin{vmatrix}a&-b\\۲&۳\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a&b\\۶&-۵\end{vmatrix}=۳۲$ آن‌گاه $\begin{vmatrix}۴a&b\\-۴&۱\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۱۲۷. اگر $A=\begin{bmatrix}۳&۱\\۱&۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۴&۲\\۰&۳\end{bmatrix}$ آن‌گاه حاصل $\frac{|A^{۲}+AB|}{|B^{۲}+BA|}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۲۸. اگر $A=\begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}$ و $B=A+A^3+A^5+\cdots+A^{2n-1}$ (n عدد طبیعی) آن‌گاه $|B|$ کدام است؟

۱) n^2 ۲) $-n^2$ ۳) $-(2n-1)^2$ ۴) $(2n-1)^2$

۱۲۹. اگر A و B ماتریس‌های ۲×۲ باشند، به طوری‌که $A+2B=\begin{bmatrix}5&-3\\0&-3\end{bmatrix}$ و $2A-B=\begin{bmatrix}5&-11\\-5&4\end{bmatrix}$، آن‌گاه $|A|+|B|$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۷ ۳) ۷- ۴) ۱۰-

۱۳۰. اگر A یک ماتریس ۲×۲ باشد، به طوری‌که $|A|=3$، آن‌گاه حاصل $|A-I|+|A+I|$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۸ ۴) ۴

۱۳۱. دترمینان ماتریس ۲×۲، A را Δ و مجموع درایه‌های قطر اصلی A^2 را T می‌نامیم. مربع مجموع درایه‌های قطر اصلی A کدام است؟

۱) $T+\Delta$ ۲) $T^2+2\Delta$ ۳) $2\Delta+T$ ۴) $\Delta+2T$

۱۳۲. اگر $A=[a_{ij}]_{2\times2}$، $a_{ij}=\begin{cases}2i-j & i<j\\ i & i\ge j\end{cases}$ و $B=[b_{ij}]_{2\times2}$، $b_{ij}=\begin{cases}i+2j & i\le j\\ 2+j & i>j\end{cases}$. آن‌گاه با فرض $AX=B$ حاصل $|X|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۱۳۳. اگر $A=[a_{ij}]_{2\times3}$ و $B=[b_{ij}]_{3\times2}$ به طوری‌که $a_{ij}=(-1)^i-j$ و $b_{ij}=(-1)^j+i$، آن‌گاه دترمینان ماتریس $A\times B$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۴- ۳) ۲۰ ۴) ۲۰-

۱۳۴. اگر $A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ و $B=A+A^2+A^3+\cdots+A^{2022}$ آن‌گاه دترمینان ماتریس B کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۱-

۱۳۵. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2-4x+1=0$ باشد آن‌گاه دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}\alpha+\beta&\alpha+\beta\\-\beta&\alpha\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۲۵

۱۳۶. اگر $A=\begin{bmatrix}0&-a\\a&0\end{bmatrix}$ و دترمینان ماتریس $A^{4n}+A^{4n+1}$ برابر $a^{n+37}+a^{n+35}$ باشد، آن‌گاه n کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۳

۱۳۷. اگر $A=\begin{bmatrix}1&1\\-2&-2\end{bmatrix}$ و $B=A+I$ آن‌گاه دترمینان ماتریس $A^{2022}+B$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۲۰۲۱- ۳) ۲۰۲۱ ۴) ۱

۱۳۸. اگر $2A=\begin{bmatrix}|A|&-2\\2&|A|\end{bmatrix}$ آن‌گاه حاصل دترمینان $|A|A$ کدام است؟

۱) ۸- ۲) ۴- ۳) ۸ ۴) ۴

۱۳۹. اگر $2A+3I=\begin{bmatrix}9&4\\-2&3\end{bmatrix}$ آن‌گاه دترمینان ماتریس A^2-3A کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴- ۳) ۲ ۴) ۲-

۱۴۰. اگر $A=\begin{bmatrix}3&-1&2\\a&2&1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}3&a\\-1&2\\2&1\end{bmatrix}$ و $C=A\times B$، آن‌گاه به ازای کدام مجموعه مقادیر a، حاصل دترمینان C منفی است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\{a:a<1\}$ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۶، با کمی تغییر)

۳) $\{a:a>1\}$ ۴) $\mathbb{R}$

۱۴۱. اگر A و B ماتریس‌های مربعی از مرتبهٔ ۲ بوده و $A\times B=\begin{bmatrix}7&8\\7&10\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه ماتریس $B\times A$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\begin{bmatrix}15&2\\8&2\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-15&-2\\-8&2\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}15&2\\8&-2\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-15&2\\-8&-2\end{bmatrix}$

۱۴۲. فرض کنید $A=\begin{bmatrix}1&a&3\\-1&1&1\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}1&-1\\a&1\\3&1\end{bmatrix}$ و $ACB=52I$، اگر $|B|=104$ باشد آن‌گاه مجموع مقادیر ممکن برای a، کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۱۴۰۰، با کمی تغییر)

۱) ۲- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ فصل ۱ ماتریس و کاربردها

۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

درایه‌های ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به‌صورت زیر مشخص می‌شود:

$$a_{ij}=\begin{cases} i-j & i\geq j \\ j & j>i \end{cases} \Rightarrow a_{۱۱}=۱-۱=۰,\ a_{۲۲}=۲-۲=۰,\ a_{۳۳}=۳-۳=۰$$

$$a_{۱۲}=۲\ ,\ a_{۱۳}=۳\ ,\ a_{۲۱}=۲-۱=۱\ ,\ a_{۲۳}=۳$$

$$,\ a_{۳۱}=۳-۱=۲, a_{۳۲}=۳-۲=۱$$

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}} ۱+۲+۱+۲+۳+۳=۱۲$$

۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A=[ij]_{۳\times۳} \Rightarrow a_{۱۱}=۱\ ,\ a_{۳۲}=۳\times۲=۶$$

$$B=[(i-j)^{۲}]_{۳\times۳} \Rightarrow b_{۲۲}=(۲-۲)^{۲}=۰,\ b_{۲۱}=(۲-۱)^{۲}=۱$$

$$a_{۱۱}b_{۲۲}+b_{۲۱}a_{۳۲}=۱\times۰+۱\times۶=۶$$

۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

نکته: دو ماتریس A و B برابرند، هرگاه مرتبهٔ آن‌ها یکی باشد و درایه‌های نظیر آن‌ها برابر باشند.

$$A=B\Rightarrow \begin{bmatrix} -۳ & x+۲y \\ -۸ & -۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x-۲y & ۱ \\ z^{۳} & -۴ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-۲y=-۳ \\ x+۲y=۱ \\ z^{۳}=-۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ y=۱ \\ z=-۲ \end{cases} \Rightarrow x+y+z=-۱+۱-۲=-۲$$

۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A=B\Rightarrow \begin{bmatrix} x-۳y & x \\ ۱ & y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۶-y \\ ۱ & ۶-x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-۳y=۲ \\ x=۶-y \\ y=۶-x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۳y=۲ \\ x+y=۶ \end{cases} \Rightarrow x-۳y+۳x+۳y=۲+۱۸\Rightarrow ۴x=۲۰$$

$$\Rightarrow x=۵\ ,\ y=۶-۵=۱$$

$$۲B+C=۲\begin{bmatrix} ۲ & ۶-۱ \\ ۱ & ۶-۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۴ & -۸ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۱۰ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۴ & -۸ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$(A+B)+(A-B)=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\Rightarrow ۲A=\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\Rightarrow a_{۱۲}=-۱$$

۶ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$a_{ij}=\begin{cases} ۳i+۴j & i\leq j \\ ۲i-j & i>j \end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & ۱۱ \\ ۳ & ۱۴ \end{bmatrix}$$

$$B=A\Rightarrow \begin{bmatrix} ۲x+y & ۴a+b-۷ \\ a-b+۱ & ۳x+۵y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & ۱۱ \\ ۳ & ۱۴ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x+y=۷ \\ ۳x+۵y=۱۴ \end{cases},\ \begin{cases} ۴a+b-۷=۱۱ \\ a-b+۱=۳ \end{cases}$$

از حل دو دستگاه نتیجه می‌شود $x=۳$، $y=۱$، $a=۴$ و $b=۲$ و نهایتاً داریم:

$$(۳x+۲y-۳a)^{b}=(۳\times۳+۲\times۱-۳\times۴)^{۲}=(۱۱-۱۲)^{۲}=۱$$

۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$a_{ij}=\begin{cases} i+j & i=j \\ i-j & i\neq j \end{cases}\Rightarrow A=[a_{ij}]_{۳\times۳}=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & -۲ \\ ۱ & ۴ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$xA+yB=x\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & -۲ \\ ۱ & ۴ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۶ \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۲x+۲y & -x-y & -۲x \\ x+y & ۴x+۲y & -x+۳y \\ ۲x+y & x+y & ۶x+۲y \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر فرعی = مجموع درایه‌های قطر اصلی

$$\Rightarrow ۲x+۲y+۴x+۲y+۶x+۲y=۲x+y+۴x+۲y-۲x$$

$$\Rightarrow ۳y=-۸x\Rightarrow \frac{x}{y}=-\frac{۳}{۸}$$

۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\begin{bmatrix} x^{۲} & y^{۲} \\ z^{۴} & ۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x & ۱ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۴} & ۲y \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}\Rightarrow \begin{bmatrix} x^{۲}+x & y^{۲}+۱ \\ z^{۴}-۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۴} & ۲y \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}\Rightarrow \begin{cases} x^{۲}+x=-\frac{۱}{۴} \\ y^{۲}+۱=۲y \\ z^{۴}-۲=-۱ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} (x+\frac{۱}{۲})^{۲}=۰ \\ (y-۱)^{۲}=۰ \\ z^{۴}=۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}, y=۱, z=\pm۱$$

$$\max(xyz)=-\frac{۱}{۲}\times۱\times(-۱)=\frac{۱}{۲}$$

۹

B مجموع درایه‌های قطر اصلی =

مجموع درایه‌های قطر اصلی A − مجموع درایه‌های قطر اصلی I

با توجه به این‌که $A=\begin{bmatrix}5&8&4\\3&2&5\\7&6&0\end{bmatrix}$ و $I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ داریم:

B مجموع درایه‌های قطر اصلی $= 3-(5+2+0)=3-7=-4$

۱۰

نکته: اگر k یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه $\sin k\pi = 0$

$$a_{ij}=\begin{cases}3 & i=j\\ \sin\pi(i+j) & i\neq j\end{cases}\Rightarrow a_{11}=a_{22}=a_{33}=3$$

$$,a_{12}=a_{13}=a_{21}=a_{23}=a_{31}=a_{32}=0$$

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}\Rightarrow$ A یک ماتریس اسکالر است.

۱۱

$$xA+yB=\begin{bmatrix}1&-2\\-1&3\end{bmatrix}\Rightarrow x\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2\\-1&3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}0&-x\\-x&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y&0\\y&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2\\-1&3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}y&-x\\y-x&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2\\-1&3\end{bmatrix}$$

تساوی فوق امکان‌پذیر نیست؛ زیرا به ازای $y=1$ یا $y=3$ همهٔ درایه‌های نظیر برابر نیستند؛ پس x و y ای وجود ندارد که داشته باشیم $xA+yB=\begin{bmatrix}1&-2\\-1&3\end{bmatrix}$

۱۲

$$C=A+B=\begin{bmatrix}1&b\\3&-1\\2&a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a&3\\b&2\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+1&b+3\\b+3&1\\3&a+1\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}c_{11}=2c_{22}\Rightarrow a+1=2\times1\Rightarrow a=1\\ c_{31}-2=c_{12}\Rightarrow 3-2=b+3\Rightarrow b=-2\end{array}\right\}\Rightarrow a+b=1-2=-1$$

۱۳

$$C+2D=3I\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0\\4&-1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1&0\\k&2\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}3&0\\4+2k&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}\Rightarrow 4+2k=0\Rightarrow k=-2$$

۱۴

$$B=A+2A+3A+\cdots+nA=(1+2+3+\cdots+n)A$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{bmatrix}-2&0\\4&-2\end{bmatrix}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}-n(n+1)&0\\2n(n+1)&-n(n+1)\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}2n(n+1)-2n(n+1)=0$$

۱۵

$$a_{ij}=\begin{cases}3-a_{ij} & i\neq j\\ -a_{ij} & i=j\end{cases}\Rightarrow a_{11}=-a_{11}\Rightarrow a_{11}=0$$

$$\xrightarrow{\text{به طریق مشابه}}a_{22}=a_{33}=0$$

$$a_{12}=3-a_{12}\Rightarrow a_{12}=\frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{به طریق مشابه}}a_{13}=a_{21}=a_{23}=a_{31}=a_{32}=\frac{3}{2}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}&0&\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&0\end{bmatrix}\Rightarrow A-\frac{1}{2}I=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}6\times\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=\frac{15}{2}=7/5$$

۱۶

$$a_{ij}=\begin{cases}2i-a_{ji} & i<j\\ 6-a_{ji} & i=j\end{cases}\Rightarrow a_{11}=6-a_{11}\Rightarrow a_{11}=3$$

$$\xrightarrow{\text{به طریق مشابه}}a_{22}=a_{33}=3$$

$$a_{12}=2-a_{21}\Rightarrow a_{12}+a_{21}=2,\ a_{13}=2-a_{31}\Rightarrow a_{13}+a_{31}=2$$

$$a_{23}=4-a_{32}\Rightarrow a_{23}+a_{32}=4$$

$$A=\begin{bmatrix}3&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&3&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}$$

$$9+(a_{12}+a_{21})+(a_{13}+a_{31})+(a_{23}+a_{32})=9+2+2+4=17$$

۱۷

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\5&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2a&3\\1&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2a+2&3+2c\\b-10a&15+bc\end{bmatrix}$$

$$(\text{فرض})\ AB=\begin{bmatrix}0&-5\\-6&-1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-2a+2&3+2c\\b-10a&15+bc\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-5\\-6&-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2a+2=0\\3+2c=-5\\b-10a=-6\\15+bc=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=1,\ c=-4,\ b=4\Rightarrow abc=1\times4\times(-4)=-16$$

۱۸

$$A^2=\begin{bmatrix}x&x\\y&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&x\\y&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^2+xy&x^2+xy\\yx+y^2&yx+y^2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(\text{فرض})A^2=A}\begin{bmatrix}x^2+xy&x^2+xy\\yx+y^2&yx+y^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x&x\\y&y\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2+xy=x\\yx+y^2=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=1\\x+y=1\end{cases}$$

۱۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

بنا به فرض $a_{ij}=i-j$ و $b_{ij}=2i+3j$ داریم:

$$C_{3\times6}=A_{3\times4}\times B_{4\times6}\Rightarrow c_{34}=(\text{سطرسوم}\,A)\times(\text{ستون‌چهارم}\,B)$$

$$\Rightarrow c_{34}=\begin{bmatrix}3-1 & 3-2 & 3-3 & 3-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2+12\\4+12\\6+12\\8+12\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}14\\16\\18\\20\end{bmatrix}=28+16-20=24$$

۲۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$AC=B\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1\\a^2 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\a\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x+y\\a^2x+y\\x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\a\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y=2\\x-y=a\\a^2x+y=1\end{cases}\Rightarrow x=\frac{a+2}{2},\ y=\frac{2-a}{2}$$

$$\xrightarrow{a^2x+y=1}a^2\times\frac{a+2}{2}+\frac{2-a}{2}=1$$

$$\Rightarrow a^3+2a^2+2-a=2\Rightarrow a(a^2+2a-1)=0$$

$$\Rightarrow a=0 \text{ یا } a^2+2a-1=0\xrightarrow{a_2+a_3=-2}a_1+a_2+a_3$$

$$=0-2=-2$$

۲۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

بنا به فرض $B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}_{3\times3}$ و $C=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}_{2\times3}$ با توجه به تساوی $A\times B=C$ ماتریس A نیز 2×3 می‌باشد. فرض کنیم $A=\begin{bmatrix}x & y & z\\t & u & v\end{bmatrix}_{2\times3}$ در این صورت داریم:

$$\begin{bmatrix}x & y & z\\t & u & v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x & -x+y-z & z\\t & -t+u-v & v\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow x=1,\ z=2,\ t=0,\ v=1,\ -x+y-z=-3$$

$$,\ -t+u-v=-1\Rightarrow y=0,\ u=0$$

$$x+y+z+t+u+v=1+0+2+0+0+1=4$$

۲۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

بنــا بـــه فـــرض $A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\4 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}3 & -9\\6 & 12\\0 & 15\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}4 & -1 & 5\\2 & 1 & 1\end{bmatrix}$ و $D=(2A-\frac{1}{3}B)C$ می‌باشد.

$$d_{22}=(2A-\frac{1}{3}B)\text{ سطر دوم}\times C\text{ ستون دوم}$$

$$=\begin{bmatrix}2\times4-\frac{1}{3}\times6 & 2\times2-\frac{1}{3}\times12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=-6$$

۲۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

در این‌جا محاسبهٔ ماتریس‌های BAB و A^2B وقت‌گیر است؛ بـه همـین جهت به کمـک خـواص ضـرب ماتریس‌هـا عبـارت داده‌شـده را به‌صـورت زیر می‌نویسیم:

$$A^2B+BAB=A(AB)+B(AB)=(A+B)AB$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$,AB=\begin{bmatrix}1 & -2\\1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\\frac{3}{2} & \frac{7}{4}\end{bmatrix}$$

$$A^2B+BAB=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\\frac{3}{2} & \frac{7}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}$$

۲۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\-\sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\-b & a\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\\\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a & b\\-b & a\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\cos(\alpha-\beta) & \sin(\beta-\alpha)\\\sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\-b & a\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow b=\sin(\beta-\alpha)$$

۲۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\begin{bmatrix}x & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}=0\Rightarrow\begin{bmatrix}-x+2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-x^2+2x+3\end{bmatrix}=0\Rightarrow-x^2+2x+3=0\Rightarrow-(x+1)(x-3)=0$$

$$\Rightarrow x=-1 \text{ یا } x=3$$

۲۶ (۱) (۲) (۳) (۴)

روش اول: بنابه فرض، ماتریس $A_{2\times2}$ چنان است که $A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-b\\-a\end{bmatrix}$ داریم:

$$A^2\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}=A(A\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix})=A\begin{bmatrix}-(-2)\\-(-1)\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$$

روش دوم: یکی از ماتریس‌های A که در تسـاوی $A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-b\\-a\end{bmatrix}$ صـدق می‌کند، $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}$ است. داریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$,A^2\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$$

۲۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

نکته: اگر A و B دو مـاتریس 2×2 باشـند، آن‌گـاه درایـه‌های قطـر اصلی ماتریس $A\times B-B\times A$ قرینهٔ یکدیگرند.

بنابراین از بین گزینه‌ها تنها ماتریس $\begin{bmatrix}3 & 0\\3 & -3\end{bmatrix}$ می‌تواند $A\times B-B\times A$ باشد.

۲۸

$$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1+2&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&0\\1+2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1+2+3&1\end{bmatrix}$$

و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1&0\\7&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1+2+\cdots+7&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\\frac{7(7+1)}{2}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\28&1\end{bmatrix}$$

۲۹

$$AB+2A+B+2I=AB+B+2A+2I$$
$$=(A+I)B+(A+I)(2I)=(A+I)(B+2I)$$
$$=\begin{bmatrix}3&-1\\4&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&2\\6&6\end{bmatrix}$$

۳۰

$$a_{ij}=\begin{cases}i & i>j\\ j & i\le j\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1&2\\2&2\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}1&2\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&6\\6&8\end{bmatrix}$$

(مجموع درایه‌های ماتریس A) - (مجموع درایه‌های ماتریس A^2)

$$=(5+6+6+8)-(1+2+2+2)=25-7=18$$

۳۱

به کمک خواص ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$(ABC)^2=(ABC)(ABC)=(AB)C(ABC)$$
$$=(AB)(CA)(BC)$$
$$(ABC)^2=\begin{bmatrix}6&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&2\\5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\2&-2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-3&-4\\3&-8\end{bmatrix}$$

۳۲

$$A\times B=\begin{bmatrix}5&a\\b&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a+5&a-10\\b-6&-2b-2\end{bmatrix}$$

برای این‌که ماتریس $A\times B$ قطری باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}a-10=0\\b-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=10\\b=6\end{cases}\Rightarrow a-b=10-6=4$$

۳۳

حاصل‌ضرب زیر یک ماتریس 2×2 است.

$$\begin{bmatrix}x&-1&4\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-2\\1&0\\y&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-1+4y&-2x+4\\4+3+y&-4+1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2x+4y-1&-2x+4\\y+7&-3\end{bmatrix}$$

برای این‌که ماتریس فوق قطری باشد باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}-2x+4=0\\y+7=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=-7\end{cases}$$

۳۴

$$AB=\begin{bmatrix}-4&p&-2\\4&2&q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q&-4\\2&2q\\4p&6\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-4q+2p-8p&16+2pq-12\\4q+4+4pq&-16+4q+6q\end{bmatrix}$$

برای این‌که AB قطری باشد باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}16+2pq-12=0\\4q+4+4pq=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}pq=-2\\q+1+pq=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow q+1-2=0\Rightarrow q=1,\ p=-2$$
$$q-p=1-(-2)=3$$

۳۵

روش اول:

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&1\\4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&1\\4&8\end{bmatrix},\ A^2=\alpha A+\beta I$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}5&1\\4&8\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}-1&1\\4&2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}5&1\\4&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta-\alpha&\alpha\\4\alpha&2\alpha+\beta\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\beta-\alpha=5\\2\alpha+\beta=8\\\alpha=1\end{cases}$$

با قرار دادن $\alpha=1$ در دو معادلهٔ دیگر مقدار $\beta=6$ می‌شود، پس $(\alpha,\beta)=(1,6)$

روش دوم:

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$، آن‌گاه داریم: $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=\bar{O}$

$$A=\begin{bmatrix}-1&1\\4&2\end{bmatrix}\Rightarrow A^2-(-1+2)A+(-2-4)I=\bar{O}$$
$$\Rightarrow A^2-A-6I=\bar{O}\Rightarrow A^2=A+6I=\alpha A+\beta I$$
$$\Rightarrow(\alpha,\beta)=(1,6)$$

۳۶

$$AB=\begin{bmatrix}x&-1&-x\\0&0&4\\y&z&z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2z&\frac{1}{2}&2\\2z&0&-4z\\0&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2xz-2z&0&2x+4z\\0&2&0\\2yz+2z^2&\frac{y}{2}+\frac{z}{2}&2y-4z^2\end{bmatrix}$$

برای این‌که AB ماتریس اسکالر باشد باید درایه‌های غیر از قطر اصلی صفر و درایه‌های قطر اصلی برابر باشند. z نمی‌تواند صفر باشد زیرا درایه سطر اول و ستون اول صفر می‌شود.

$$\begin{cases}2x+4z=0\\2yz+2z^2=0\\\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2z\\y=-z\end{cases},\ \begin{cases}2xz-2z=2\\2y-4z^2=2\end{cases}$$

با قرار دادن $x=-2z$ و $y=-z$ در دستگاه سمت چپ داریم:

$$\begin{cases}-4z^2-2z=2\\ -2z-4z^2=2\end{cases}\Rightarrow 2z^2+z-1=0\Rightarrow z=-1 \text{ یا } z=-\frac{1}{2}$$

چون بنا به فرض y عددی صحیح است پس $z=-\frac{1}{2}$ قابل قبول نیست و نهایتاً داریم:

$$xy=(-2z)(-z)=2z^2=2(-1)^2=2$$

۳۷

$$\begin{bmatrix}x&0&0\\y&t&0\\z&u&r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y&z\\0&t&u\\0&0&r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2&1\\a&4&2\\b&c&4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x^2&xy&xz\\xy&y^2+t^2&yz+tu\\zx&zy+ut&z^2+u^2+r^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2&1\\a&4&2\\b&c&4\end{bmatrix}$$

$$x^2=4\Rightarrow x=2\ ,\ xy=2\Rightarrow y=1\ ,\ xz=1\Rightarrow z=\frac{1}{2}$$

$$a=xy=2\ ,\ b=zx=1\ ,\ y^2+t^2=4\Rightarrow 1+t^2=4\Rightarrow t=\sqrt{3}$$

$$yz+tu=c=2\Rightarrow 1\times\frac{1}{2}+\sqrt{3}\times u=2\Rightarrow u=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z^2+u^2+r^2=4\Rightarrow\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+r^2=4\Rightarrow r^2=4-1=3\Rightarrow r=\sqrt{3}$$

۳۸

$$\begin{bmatrix}x&2x&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1&1\\4&0&-2\\1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2x\\-1\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}3x+8x-1&-x-2&x-4x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2x\\-1\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}11x-1&-x-2&-3x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2x\\-1\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow x(11x-1)-2x(x+2)+3x=0\xrightarrow{x\neq 0}$$

$$11x-1-2x-4+3=0\Rightarrow 9x=2\Rightarrow x=\frac{2}{9}$$

۳۹

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\1&1&2\\2&2&3\\3&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1\\2&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\3&3\\5&5\\7&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\15\\25\\35\end{bmatrix}$$

۴۰

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=(A+B)A+(A+B)B$$

$$=A^2+BA+AB+B^2$$

$$(A+B)^2=\begin{bmatrix}2&-2&2\\2&1&1\\2&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-2&2\\2&1&1\\2&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-6&6\\8&-3&7\\8&-4&8\end{bmatrix}$$

$$A^2+B^2=(A+B)^2-(AB+BA)=\begin{bmatrix}4&-6&6\\8&-3&7\\8&-4&8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&-3&3\\5&-7&5\\4&1&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&\bigcirc&\bigcirc\\\bigcirc&4&\bigcirc\\\bigcirc&\bigcirc&5\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی A^2+B^2 $=2+4+5=11$

۴۱

بنا به فرض $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ و $a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 2 & i\neq j\end{cases}$، پس درایه‌های ماتریس A به‌صورت زیر می‌باشد:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}$$

$$A^2-4A=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&8&8\\8&4&8\\8&8&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}15$$

۴۲

نکته: اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$، آن‌گاه داریم:

ستون jام $(A\times B)$ = (ماتریس A) × (ستون jام B)

$$A^2=\begin{bmatrix}1&x&0\\0&0&y\\0&0&z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&x&0\\0&0&y\\0&0&z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&x&xy\\0&0&yz\\0&0&z^2\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}1&0&0\\x&0&0\\0&y&z\end{bmatrix}$$

ستون سوم ماتریس A^2B $=\begin{bmatrix}1&x&xy\\0&0&yz\\0&0&z^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xyz\\yz^2\\z^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\2\\-1\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases}xyz=-6\\yz^2=2\\z^3=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xyz=-6\\yz^2=2\\z=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow y=2, x=3, x+y+z=3+2-1=4$$

۴۳

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0&a\\0&b&0\\0&c&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&a\\0&b&0\\0&c&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&ac&a\\0&b^2&0\\0&bc&0\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&b&c\\a&0&0\end{bmatrix}$$

ستون دوم ماتریس (A^2-B) $=\begin{bmatrix}ac\\b^2\\bc\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\b\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ac\\b^2-b\\bc\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\\6\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases}ac=3\\b^2-b=2\Rightarrow b^2-b-2=0\Rightarrow(b+1)(b-2)=0\\bc=6\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=-1\ ,\ c=-6\ ,\ a=-\frac{1}{2}\\b=2\ ,\ c=3\ ,\ a=1\end{cases}$$

پس برای $a+b+c$ دو مقدار ۶ و ۷/۵- به‌دست می‌آید.

۴۴

نکته: برای هر دو ماتریس مربعی و هم مرتبه A و B، حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی $A\times B$ با حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی $B\times A$ برابر است.

اگر فرض کنیم $B=\begin{bmatrix}1&3&5\\7&22&36\\10&31&52\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10&17&15\\4&20&17\\302&153&-2\end{bmatrix}$

و $C=\begin{bmatrix}28&-1&-2\\-4&2&-1\\-3&-1&1\end{bmatrix}$ در این صورت $A=BC$ و می‌توان گفت مجموع درایه‌های قطر اصلی BC با مجموع درایه‌های قطر اصلی CB است.

$$\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی } A=\begin{bmatrix}28&-1&-2\\-4&2&-1\\-3&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&5\\7&22&36\\10&31&52\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}10&17&15\\4&120&17\\302&153&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10&17&15\\4&20&17\\302&153&-2\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی A برابر $10+20-2=28$ است.

۴۵

$$AB=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&2\\3&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&-1&-1\\-2&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

$$A^2B^2=A(AB)B^2=AIB^2=AB^2=(AB)B=IB=B$$

$$=\begin{bmatrix}6&-1&-1\\-2&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس A^2B^2 برابر مجموع درایه‌های ماتریس B می‌باشد یعنی عدد یک.

۴۶

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2&2\\-1&-2&-1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\-1&-2&-1\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

$$B^2=\begin{bmatrix}3&6&-2\\-2&-4&1\\-2&-3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&6&-2\\-2&-4&1\\-2&-3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

$$M=pA^2+qB^2=pI+qI=(p+q)I$$

پس M یک ماتریس اسکالر است.

۴۷

$$AB=I\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\a&2&0\\b&c&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m&n&p\\q&r&s\\t&u&v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

از تساوی فوق بلافاصله نتیجه می‌شود $n=p=s=0$ و داریم:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\a&2&0\\b&c&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m&0&0\\q&r&0\\t&u&v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}m&0&0\\\bigcirc&2r&0\\\bigcirc&\bigcirc&4v\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow m=1,\ r=\frac{1}{2},\ v=\frac{1}{4}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی $(A+B)$ = مجموع درایه‌های قطر اصلی A + مجموع درایه‌های قطر اصلی B =

$$1+2+4+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=8+\frac{3}{4}=\frac{35}{4}=8/75$$

۴۸

$$AB=I\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&3\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

از تساوی فوق بلافاصله نتیجه می‌شود $a=1$، $b=0$ و $c=0$ و در ادامه داریم:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&3\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\\bigcirc&\bigcirc&f+3i\\\bigcirc&\bigcirc&i\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow f+3i=0,\ i=1\Rightarrow f=-3i=-3$$

پس درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس B برابر ۳- است.

۴۹

با فرض $A=\begin{bmatrix}1&3&6&24\\\frac{1}{3}&1&2&8\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&1&4\\\frac{1}{24}&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&1\end{bmatrix}$

و $C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$، داریم:

$$D=C^2=\begin{bmatrix}1&3&6&24\\\frac{1}{3}&1&2&8\\\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&1&4\\\frac{1}{24}&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&6&24\\\frac{1}{3}&1&2&8\\\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&1&4\\\frac{1}{24}&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&1\end{bmatrix}$$

لزومی به محاسبهٔ همهٔ درایه‌های C^2 نیست چون درایه‌های قطر اصلی C^2 را می‌خواهیم:

$$D_{11}=1\times1+3\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{6}+24\times\frac{1}{24}=1+1+1+1=4$$

$$D_{22}=\frac{1}{3}\times3+1\times1+2\times\frac{1}{2}\times8\times\frac{1}{8}=1+1+1+1=4$$

$$D_{33}=\frac{1}{6}\times6+\frac{1}{2}\times2+1\times1+4\times\frac{1}{4}=1+1+1+1=4$$

$$D_{44}=\frac{1}{24}\times24+\frac{1}{8}\times8+\frac{1}{4}\times4+1\times1=1+1+1+1=4$$

$$D_{11}+D_{22}+D_{33}+D_{44}=4+4+4+4=16$$

۵۰

روش اول:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\text{درایهٔ سطر اول و ستون اول } A=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=9$$

$$\text{درایهٔ سطر دوم و ستون دوم } A=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7&8&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=7$$

درایهٔ سطر سوم و ستون سوم $\mathbf{A}$ $= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 5$$

مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس $\mathbf{A}$ $= 9 + 7 + 5 = 21$

روش دوم:

$$\mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی $\mathbf{BC}$ با مجموع درایه‌های قطر اصلی $\mathbf{CB}$ فرقی نمی‌کند بنابراین داریم:

مجموعه درایه‌های قطر اصلی $\mathbf{A}$ = مجموعه درایه‌های قطر اصلی $\mathbf{CB}$

$$CB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی $\mathbf{CB}$ $= (7+0+0)+(0+0+9)+(0+5+0) = 21$

۵۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

> **نکته:** سطر $\mathbf{i}$ام ماتریس $\mathbf{ABC}$ برابر است با: $(\mathbf{A}$ سطر $\mathbf{i}$ام$) \times \mathbf{B} \times \mathbf{C}$

سطر سوم ماتریس $\mathbf{A}$ $= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}} 7 + 1 - 5 = 3$$

۵۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = (\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{A} + (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{B}$$

$$= \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}\times\mathbf{A} + \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{B}^2$$

بنابه فرض $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -2\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ است؛ پس نتیجه می‌شود:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}\times\mathbf{A} - 2\mathbf{B}\times\mathbf{A} + \mathbf{B}^2$$

$$= \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}\times\mathbf{A} + \mathbf{B}^2$$

۵۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

برای این‌که ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند، باید داشته باشیم:

$$A \times B = B \times A \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 3\mathbf{b}-\mathbf{a} \\ -1 & \mathbf{a}-\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}-1 & 3-\mathbf{a} \\ \mathbf{b}-2 & 6-\mathbf{b} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}-1=5 \\ 3\mathbf{b}-\mathbf{a}=3-\mathbf{a} \\ \mathbf{b}-2=-1 \\ \mathbf{a}-\mathbf{b}=6-\mathbf{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}=6 \\ \mathbf{b}=1 \end{cases}$$

بنابراین ماتریس $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ با ماتریس $\mathbf{A}$ تعویض‌پذیر است.

۵۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$AX = 3X \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+2c \\ 2b-2c \\ -b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a \\ 3b \\ 3c \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}+2\mathbf{c}=3\mathbf{a} \\ 2\mathbf{b}-2\mathbf{c}=3\mathbf{b} \\ -\mathbf{b}+\mathbf{c}=3\mathbf{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{c}=\mathbf{a} \\ \mathbf{b}=-2\mathbf{c} \\ \mathbf{b}=-2\mathbf{c} \end{cases} \Rightarrow \frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{c}+2\mathbf{c}+\mathbf{c}}{\mathbf{c}} = 4$$

۵۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A \times B = B \times A \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & 1 \\ c & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ c & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2a-c & -3 \\ 3a+c & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+3 & -a+1 \\ 2c+15 & -c+5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\mathbf{a}-\mathbf{c}=2\mathbf{a}+3 \\ -3=-\mathbf{a}+1 \\ 3\mathbf{a}+\mathbf{c}=2\mathbf{c}+15 \\ 8=-\mathbf{c}+5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{c}=-3 \\ \mathbf{a}=4 \\ \mathbf{c}+15=3\mathbf{a} \\ \mathbf{c}=-3 \end{cases}$$

مقادیر $\mathbf{a}=4$ و $c=-3$ در تساوی $3a = c+15$ صدق می‌کنند پس دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیرند و $\mathbf{a}+\mathbf{c}=4-3=1$ است.

۵۶ (۱) (۲) (۳) (۴)

> **نکته:** ماتریس‌های مربعی و هم‌مرتبهٔ $\mathbf{A}$ و $\mathbf{I}$ همواره تعویض‌پذیرند و اتحادهای جبری برای آن‌ها برقرار است.

$$(A+I)^2 - (A-I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^2+2A+I) - (A^2-2A+I) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 4A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

و مجموع درایه‌های قطر اصلی $\mathbf{A}$ برابر است با $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

۵۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$(\mathbf{AB})^2 = (\mathbf{AB})(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(\mathbf{BA})\mathbf{B} \xrightarrow{AB=BA}$$

$$(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{A}(\mathbf{AB})\mathbf{B} = (\mathbf{A}^2\mathbf{B})\mathbf{B} = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$$

$$\Rightarrow A^2B^2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 10 \\ 10 & 26 \end{bmatrix}$$

۵۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$AB = I \Rightarrow \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & b & a \\ 3 & a & 2 \\ a & -2 & b \end{bmatrix} \times \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 & a \\ b & a & -2 \\ a & 2 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4+b^2+a^2 & ab+2a+6 & 2a-2b+ab \\ 6+ab+2a & 13+a^2 & a+2b \\ 2a-2b+ab & a+2b & a^2+b^2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{bmatrix}$$

$$۱۳+a^{۲}=۴۹ \Rightarrow a^{۲}=۳۶ \Rightarrow a=\pm۶$$

$$\Rightarrow ۴+b^{۲}+a^{۲}=۴۹ \Rightarrow b^{۲}=۴۹-۴-۳۶=۹ \Rightarrow b=\pm۳$$

چون $a+۲b=۰$ پس a و b مختلف العلامت هستند.

اگر $a=۶$ و $b=-۳$ باشند در تساوی‌های $۶+ab+۲a=۰$ و $۲a-۲b+ab=۰$ صدق می‌کنند. اما $a=-۶$ و $b=۳$ در تساوی‌های فوق صدق نمی‌کنند پس تنها جواب قابل قبول $a=۶$ و $b=-۳$ است.

۵۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A(A+۲I)=A^{۲}+۲AI=A^{۲}+۲A \xrightarrow{\text{(فرض)}\ A^{۲}=-A-I}$$

$$A(A+۲I)=-A-I+۲A=A-I$$

۶۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

بنا به فرض در ماتریس $A=\begin{bmatrix} a-۲ & ۴ & -۷ \\ b & ۰ & b+۲ \\ ۷ & a & ۰ \end{bmatrix}$ برای هر i و j داریم $a_{ij}=-a_{ji}$ پس نتیجه می‌شود:

$$a_{۱۱}=-a_{۱۱} \Rightarrow a_{۱۱}=۰,\ a_{۲۲}=-a_{۲۲} \Rightarrow a_{۲۲}=۰,\ a_{۳۳}=-a_{۳۳}$$

$$\Rightarrow a_{۳۳}=۰$$

بنابراین $a-۲$ باید صفر باشد که نتیجه می‌دهد $a=۲$ و در ادامه داریم:

$$a_{۱۲}=-a_{۲۱} \Rightarrow ۴=-b \Rightarrow b=-۴$$

$$a_{۲۳}=-a_{۳۲} \Rightarrow b+۲=-a \Rightarrow b=-۲-۲=۴$$

بنابراین $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۴ & -۷ \\ -۴ & ۰ & -۲ \\ ۷ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ و داریم:

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix} ۰ & ۴ & -۷ \\ -۴ & ۰ & -۲ \\ ۷ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۴ & -۷ \\ -۴ & ۰ & -۲ \\ ۷ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۶۵ & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & -۲۰ & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & -۵۳ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی } A^{۲}} -۶۵-۲۰-۵۳=-۱۳۸$$

۶۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

بنا به فرض $A+B=I$ و $A=BC$ می‌باشد. داریم:

$$AC-C=(A-I)C=(I-B-I)C=-BC=-A$$

۶۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

بنا به فرض $A+B=I$ و $A=BC=CB$ می‌باشد. داریم:

$$AC-CA=CBC-CA=C(BC-A)=C(BC-BC)$$

$$=C\times \bar{O}=\bar{O}$$

۶۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A^{۲}+۲A+I=\bar{O} \xrightarrow{\times A} A^{۳}+۲A^{۲}+IA=\bar{O}$$

$$\Rightarrow A^{۳}+۲A^{۲}+A=\bar{O} \Rightarrow A^{۳}+۳A^{۲}+۳A+I=۲A+I$$

$$\Rightarrow (A+I)^{۳}=۲A+I \Rightarrow (A+I)^{۳}-I=۲A$$

$$\Rightarrow (A+I)^{۳}+(-I)^{۳}=۲A$$

با فرض $B=A+I$ و $C=-I$ داریم $B^{۳}+C^{۳}=۲A$ در نتیجه:

$$B-C=A+I-(-I)=A+I+I=A+۲I$$

۶۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\text{(فرض)}\ BA=A \xrightarrow{A\times} ABA=A^{۲} \xrightarrow{\text{(فرض)}AB=B} BA=A^{۲}$$

$$\xrightarrow{BA=A} A^{۲}=A$$

$$\text{(فرض)}\ AB=B \xrightarrow{B\times} BAB=B^{۲} \xrightarrow{\text{(فرض)}BA=A} AB=B^{۲}$$

$$\xrightarrow{AB=B} B^{۲}=B$$

$$(A+B)^{۲}=(A+B)(A+B)=A^{۲}+BA+AB+B^{۲}$$

$$=A+A+B+B=۲(A+B)$$

$$(A+B)^{۳}=(A+B)^{۲}(A+B)=۲(A+B)(A+B)$$

$$=۲(A+B)^{۲}=۲\times۲(A+B)=۴(A+B)$$

۶۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

بنا به فرض $A^{۲}=I-A$ داریم:

$$A^{۲}(A+I)^{۲}=(I-A)(A^{۲}+۲A+I)=(I-A)(I-A+۲A+I)$$

$$=(I-A)(۲I+A)=۲I-A-A^{۲}=۲I-A-(I-A)=I$$

۶۶ (۱) (۲) (۳) (۴)

چون $A^{۲}=\bar{O}$ پس $A^{۳}=\bar{O}$ و می‌توان نوشت:

$$A(I-A)^{۳}=A(I-۳A+۳A^{۲}-A^{۳})=A(I-۳A+\bar{O}-\bar{O})$$

$$=AI-۳A^{۲}=A-\bar{O}=A$$

۶۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آن‌گاه داریم $A^{۲}-(a+d)A+(ad-bc)I=\bar{O}$

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{۲}-(۱+۰)A+(۱\times۰-(-۲)\times۱)I=\bar{O}$$

$$\Rightarrow A^{۲}=A-۲I \Rightarrow A\times A^{۲}=A\times(A-۲I) \Rightarrow A^{۳}=A^{۲}-۲A$$

$$\xrightarrow{A^{۲}=A-۲I} A^{۳}=A-۲I-۲A \Rightarrow A^{۳}=-A-۲I$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=-۱ \\ n=-۲ \end{cases} \Rightarrow n^{m}=(-۲)^{-۱}=-\frac{۱}{۲}$$

۶۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A^{۲}+B^{۲}+AB+BA=A^{۲}+AB+B^{۲}+BA$$
$$=A(A+B)+B(B+A)$$

$$=A(A+B)+B(A+B)=(A+B)(A+B)=(A+B)^{۲}$$

$$\xrightarrow{A+B=۲AB} A^{۲}+B^{۲}+AB+BA=(۲AB)^{۲}=۴(AB)^{۲}$$

۶۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$M=(A+I)(B+I)=(A+I)B+(A+I)I=AB+IB+AI+I^{۲}$$

$$=AB+B+A+I \xrightarrow{\text{(فرض)}\ A+B+AB=\bar{O}} M=\bar{O}+I=I$$

۷۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A^{۳}+I=A^{۳}+I^{۳}=(A+I)(A^{۲}-AI+I^{۲})$$

$$=(A+I)(A^{۲}-A+I) \quad (۱)$$

$$\text{(فرض)}\ A^{۲}-A-۲I=\bar{O} \Rightarrow A^{۲}-A=۲I \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow A^{۳}+I=(A+I)(۲I+I)=۳AI+۳I^{۲}=۳A+۳I$$

۷۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$، آن‌گاه داریم:
$A^2-(a+d)A+(ad-bc)I=\bar{O}$

$$A=\begin{bmatrix}1&4\\1&6\end{bmatrix}\Rightarrow A^2-(1+6)A+(6\times1-4\times1)I=\bar{O}\Rightarrow A^2=7A-2I$$

$$\Rightarrow A\times A^2=A\times(7A-2I)\Rightarrow A^3=7A^2-2A$$

با قرار دادن A^3 در عبارت داده‌شده داریم:

$$A^3-7A^2+2A+4I=7A^2-2A-7A^2+2A+4I=4I$$

۷۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

بنابه فرض $A^2=A$ و $AB=I$ است. داریم:

$$A^3B^2=A(A^2B^2)\xrightarrow{A^2=A}A^3B^2=A(AB^2)$$

$$=A^2B^2=AB^2=(AB)B=IB=B$$

۷۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

(فرض) $AB+BA=I\Rightarrow A\times(AB+BA)=A\times I$

$$\Rightarrow A^2B+ABA=A$$

(فرض) $AB+BA=I\Rightarrow(AB+BA)\times A=I\times A$

$$\Rightarrow ABA+BA^2=A$$

از تفاضل دو تساوی فوق نتیجه می‌شود:

$$A^2B-BA^2=A-A=\bar{O}$$

۷۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

(فرض) $A^2+3A-I=0\Rightarrow A^2=-3A+I\xrightarrow[\text{از راست}]{\text{ضرب در } U=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}$

$$A^2U=(-3A+I)U=-3AU+U\xrightarrow{\text{ضرب در A از چپ}}A^3U$$

$$=A(-3AU+U)=-3A^2U+AU$$

$$\xrightarrow{A^2U=-3AU+U}A^3U=-3(-3AU+U)+AU$$

$$\Rightarrow A^3U=10AU-3U\xrightarrow{U=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},AU=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}A^3U=10\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\10\end{bmatrix}$$

۷۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$(AB)^2=(AB)(AB)=A(BA)B\xrightarrow{AB=\lambda BA\ (\text{فرض})}$$

$$(AB)^2=A(\frac{AB}{\lambda})B\Rightarrow(AB)^2=\frac{1}{\lambda}(A^2B)B=\frac{1}{\lambda}A^2B^2$$

$$\Rightarrow(AB)^2-A^2B^2=\frac{1}{\lambda}A^2B^2-A^2B^2$$

$$\Rightarrow(AB)^2-A^2B^2=(\frac{1}{\lambda}-1)A^2B^2=\frac{1-\lambda}{\lambda}A^2B^2$$

۷۶ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$(A+I)(B-I)-(B-I)(A+I)$$

$$=(A+I)B-(A+I)I-(B-I)A-(B-I)I$$

$$=AB+IB-AI-I^2-BA+IA-BI+I^2$$

$$=AB+B-A-I-BA+A-B+I=AB-BA$$

اما بنابه فرض، $AB-BA=2I$ است؛ پس نتیجه می‌شود:

$$(A+I)(B-I)-(B-I)(A+I)=2I$$

۷۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=2A$$

$$A^3=A^2\times A=2A\times A=2A^2$$

$$\Rightarrow A^3=2(2A)=4A\ ,\ A^4=A^3\times A=4A\times A$$

$$=4A^2=4(2A)=8A\ ,\ A^5=A^4\times A=8A\times A$$

$$=8A^2=8(2A)=16A$$

پس جمع درایه‌های A^5 برابر $64=16(1+1+1+1)$ است.

۷۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

نکته: اگر $A^2=\lambda A$ باشد، آن‌گاه $A^k=\lambda^{k-1}A$ است. (k عدد طبیعی است)

$$A^2=\begin{bmatrix}\frac12&\frac12\\\frac12&\frac12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac12&\frac12\\\frac12&\frac12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac14+\frac14&\frac14+\frac14\\\frac14+\frac14&\frac14+\frac14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac12&\frac12\\\frac12&\frac12\end{bmatrix}=A$$

$$A^3=A^2\times A=A\times A=A^2=A\xrightarrow{\text{به طور استقرایی}}A^n=A$$

پس $A^{100}=A$ می‌باشد.

۷۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$$

$$A^4=A^3\times A=(-I)\times A=-A\ ,\ A^5=A^4\times A=(-A)\times A=-A^2$$

$$A^6=A^5\times A=(-A^2)\times A=-A^3=-(-I)=I$$

پس کم‌ترین مقدار n که به ازای آن $A^n=I$ است، $n=6$ می‌باشد.

۸۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2\\-1&-2\end{bmatrix}$$

$$A-A^2=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&2\\-1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=2I$$

$$B=\frac{1}{2^{8-n}}(A-A^2)^n=\frac{1}{2^{8-n}}(2I)^n=\frac{2^n}{2^{8-n}}I^n=\frac{2^n}{2^{8-n}}I$$

برای این‌که ماتریس B برابر I باشد باید داشته باشیم:

$$\frac{2^n}{2^{8-n}}=1\Rightarrow2^n=2^{8-n}\Rightarrow n=8-n\Rightarrow2n=8\Rightarrow n=4$$

۸۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A^2=\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2&2a\\0&a^2\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}a^2&2a\\0&a^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^3&3a^2\\0&a^3\end{bmatrix}$$

$$A^4=A^3\times A=\begin{bmatrix}a^3&3a^2\\0&a^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^4&4a^3\\0&a^4\end{bmatrix}$$

و به طور استقرایی نتیجه می‌شود:

$$A^n=\begin{bmatrix}a^n & 4a^{n-1}\\ 0 & a^n\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی}} a^n+a^n=2a^n$$

۸۲ ۱ ۲ ۳ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2\\0&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&16\\0&49\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A^2$ درایهٔ سطر اول و ستون دوم $=16=\dfrac{7^2-1}{3}$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&16\\0&49\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&114\\0&\bigcirc\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A^3$ درایهٔ سطر اول و ستون دوم $=114=\dfrac{7^3-1}{3}$

و با استدلال استقرایی نتیجه می‌شود:

$$B=A^{50}=\begin{bmatrix}1&b_{12}\\0&\bigcirc\end{bmatrix}\Rightarrow b_{12}=\frac{7^{50}-1}{3}$$

۸۳ ۱ ۲ ۳ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$$

$$A^3=A^2\times A=-I\times A=-A\ ,\ A^4=A^2\times A^2=(-I)^2=I$$

$$A^5=A^4\times A=I\times A=A\ ,A^6=A^5\times A=A\times A=A^2=-I$$

بنابراین به طور استقرایی نتیجه می‌شود توان‌های A با دوره تناوب ۴ تکرار می‌شود:

$$(A+A^2+A^3+A^4)+(A^5+A^6+A^7+A^8)+\cdots$$
$$+(A^{2017}+A^{2018}+A^{2019}+A^{2020})+A^{2021}+A^{2022}$$
$$=\underbrace{(A-I-A+I)}_{\bar O}+\underbrace{(A-I-A+I)}_{\bar O}+\cdots+\underbrace{(A-I-A+I)}_{\bar O}$$
$$+A+(-I)=A-I$$

۸۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}\ ,\ A^3=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

$$A^{2010}=(A^3)^{670}=I^{670}=I$$

۸۵ ۱ ۲ ۳ ۴

$$M^2=M\times M=\begin{bmatrix}2\cos^2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & 2\sin^2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\cos^2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & 2\sin^2\theta\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M^2=\begin{bmatrix}4\cos^4\theta+\sin^2 2\theta & 2\cos^2\theta\sin 2\theta+2\sin^2\theta\sin 2\theta\\ 2\cos^2\theta\sin 2\theta+2\sin^2\theta\sin 2\theta & \sin^2 2\theta+4\sin^4\theta\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta}$$

$$\begin{bmatrix}4\cos^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta) & 2\sin 2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\\ 2\sin 2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta) & 4\sin^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\end{bmatrix}$$

$$=2\begin{bmatrix}2\cos^2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & 2\sin^2\theta\end{bmatrix}=2M$$

$$M^3=M^2\times M=(2M)M=2M^2=2(2M)=4M$$

۸۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix},A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}$$

و به طور استقرایی نتیجه می‌شود $A^8=\begin{bmatrix}1&0\\8&1\end{bmatrix}$

$$B^2=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix},B^3=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$$

و مجدداً به طریق استقرایی نتیجه می‌شود $B^9=\begin{bmatrix}1&9\\0&1\end{bmatrix}$، پس می‌توان نوشت:

$$A^8\times B^9=\begin{bmatrix}1&0\\8&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&9\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&9\\8&73\end{bmatrix}$$

۸۷ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\mathbf{A^2-A+I=\bar O\Rightarrow A^2=A-I\Rightarrow AA^2=A(A-I)}$$
$$\Rightarrow A^3=A^2-AI=A^2-A$$

با قرار دادن $\mathbf{A^2=A-I}$ در تساوی اخیر نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{A^3=(A-I)-A=-I}$$
$$\mathbf{A^{30}=(A^3)^{10}=(-I)^{10}=(-1)^{10}I^{10}=I}$$

۸۸ ۱ ۲ ۳ ۴

نکته: اگر $C^k=\bar O$ باشد، آن‌گاه $\mathbf{C^n=\bar O\ (n\ge k)}$

$$\mathbf{C=(A+B)(A-B)=(A+B)A-(A+B)B}$$
$$\mathbf{=A^2+BA-AB-B^2}$$

بنابه فرض $\mathbf{A^2=B^2=I}$، $AB=\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}$ و $BA=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}$ می‌باشد. پس داریم:

$$C=(A+B)(A-B)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\-2&-2\end{bmatrix}$$

$$C^2=C\times C=\begin{bmatrix}2&2\\-2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\-2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\bar O\Rightarrow C^{1401}=\bar O$$

۸۹ ۱ ۲ ۳ ۴

بنابه فرض $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\1&0&0\end{bmatrix}$ می‌باشد. داریم:

نکته: اگر $\mathbf{(A\times B)\times C=[d_{ij}]}$ آن‌گاه:

$\mathbf{d_{ij}}=$ (سطر $\mathbf{i}$ام $\mathbf{A}$) (ماتریس $\mathbf{B}$) (ستون $\mathbf{j}$ ام $\mathbf{C}$)

درایهٔ نظیر سطر سوم و ستون اول A^3 = (سطر سوم $\mathbf{A}$)(ماتریس $\mathbf{A}$)(ستون اول $\mathbf{A}$)

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

درایهٔ نظیر سطر سوم و ستون اول $\mathbf{A^3}$ $=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=1\times1+0\times0+0\times1=1$

۹۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$A+I=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$$

$$(A+I)^2=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}$$

$$(A+I)^6=(A+I)^2(A+I)^2(A+I)^2$$

درایهٔ سطر اول و ستون اول $a=(A+I)^6$

$=((A+I)^2$ سطر اول$)((A+I)^2$ ماتریس$)((A+I)^2$ ستون اول$)$

$$=\begin{bmatrix}5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$$

$$a=\begin{bmatrix}41&40\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}=41\times5+4\times40=205+160=365$$

درایهٔ سطر اول و ستون دوم $b=(A+I)^6$

$=((A+I)^2$ سطر اول$)((A+I)^2$ ماتریس$)((A+I)^2$ ستون اول$)$

$$=\begin{bmatrix}5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$$

$$b=\begin{bmatrix}41&40\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}=4\times41+5\times40=164+200=364$$

بنابراین $a-b=365-364=1$ می‌باشد.

۹۱

نکته:

$$(I+A)^n=\binom{n}{0}I+\binom{n}{1}A+\binom{n}{2}A^2+\dots+\binom{n}{n}A^n$$

نتیجه: اگر $A^n=O\ (n\ge 2)$ آن‌گاه $(I+A)^n=I+nA$

بنابه فرض، $A^2=O$ است. پس می‌توان نوشت:

$$(I-A)^4(I+A)^5=(I-4A)(I+5A)$$

$$=I^2+5A-4A-20A^2=I+A-20A^2=I+A$$

۹۲

$$(I+A)^4=\binom{4}{0}I+\binom{4}{1}A+\binom{4}{2}A^2+\binom{4}{3}A^3+\binom{4}{4}A^4$$

$$\Rightarrow (I+A)^4=I+4A+6A^2+4A^3+A^4$$

(فرض) $A^2=A\Rightarrow A^3=A^2=A\Rightarrow A^4=A^2=A$

نکته: اگر ماتریس A چنان باشد که $A^2=A$، آن‌گاه $A^n=A\ (n\ge 2)$

$$(I+A)^4=I+4A+6A+4A+A=I+15A$$

۹۳

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&\sqrt3\\-\sqrt3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&\sqrt3\\-\sqrt3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-3&-2\sqrt3\\2\sqrt3&-3+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2&-2\sqrt3\\2\sqrt3&-2\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}-2&-2\sqrt3\\2\sqrt3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&\sqrt3\\-\sqrt3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&0\\0&8\end{bmatrix}=8I$$

$$A^{40}=(A^3)^{13}A=(8I)^{13}A=2^{39}I^{13}A=2^{39}IA$$

$$=2^{39}A=\begin{bmatrix}-2^{39}&2^{39}\sqrt3\\-2^{39}\sqrt3&-2^{39}\end{bmatrix}$$

۹۴

$$(\text{فرض})\ AB=A\xrightarrow{\times A}ABA=A^2\xrightarrow{BA=B\ (\text{فرض})}AB=A^2$$

$$\Rightarrow A=A^2$$

در نتیجه $A^n=A\ (n\ge 2)$ و می‌توان نوشت:

$$A+A^2+A^3+\dots+A^{1401}=\underbrace{A+A+A+\dots+A}_{1401\ \text{مرتبه}}=1401A$$

۹۵

$$C=AB=\begin{bmatrix}-1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C^2=\begin{bmatrix}-1&-1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C^2=-C\Rightarrow C^3=C^2\times C=-C\times C=-C^2=C$$

$$\Rightarrow C^4=C^3\times C=C^2=-C$$

و به‌صورت استقرایی نتیجه می‌شود $C^n=(-1)^{n-1}C$ و در ادامه داریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

$$C^n+A^2=(-1)^{n-1}\begin{bmatrix}-1&-1\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(-1)^n&(-1)^n\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1)^n+1&(-1)^n\\0&1\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس C^n+A^2 برابر است با $2+2(-1)^n$.

۹۶

$$AB=I\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&\frac12&-1\\0&0&\frac14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c\\0&d&e\\0&0&f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}a&b-d&c-e+f\\0&\frac12d&\frac12e-f\\0&0&\frac14f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow a=1,d=2,f=4$$

$$\Rightarrow b-d=0\Rightarrow b=d=2,\ \frac12e-f=0\Rightarrow e=2\times4=8$$

$$c-e+f=0\Rightarrow c-8+4=0\Rightarrow c=4$$

بنابراین $B=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&2&8\\0&0&4\end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های ماتریس B برابر است با:

$$4+4+2+2+8+1=21$$

۹۷

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&8\\0&9\end{bmatrix},\quad A^3=A^2\times A$$

$$=\begin{bmatrix}1&8\\0&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&26\\0&27\end{bmatrix}$$

$$A^4=A^3\times A=\begin{bmatrix}1&26\\0&27\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&80\\0&81\end{bmatrix}$$

بنابراین به‌صورت استقرایی نتیجه می‌شود $A^n = \begin{bmatrix} 1 & \bigcirc \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$. بنا به فرض مجموع درایه‌های قطر اصلی برابر ۲۴۴ است. داریم:

$$3^n + 1 = 244 \Rightarrow 3^n = 243 = 3^5 \Rightarrow n = 5$$

۹۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

و به‌صورت استقرایی نتیجه می‌شود $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های A^n برابر $2 - n$ است.

۹۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A^3 = A^2 \times A = (2A - I) \times A = 2A^2 - A$$
$$= 2(2A - I) - A = 3A - 2I$$
$$A^4 = A^3 \times A = (3A - 2I)A = 3A^2 - 2A$$
$$= 3(2A - I) - 2A = 4A - 3I$$
$$A^5 = A^4 \times A = (4A - 3I)A = 4A^2 - 3A$$
$$= 4(2A - I) - 3A = 5A - 4I$$

و به‌صورت استقرایی نتیجه می‌شود $A^{10} = 10A - 9I$ لذا $a = 10$ و $b = -9$ و $(a,b) = (10,-9)$.

۱۰۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و به‌صورت استقرایی نتیجه می‌شود $A^n = \begin{bmatrix} 1 & -2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و در ادامه داریم:

$$B = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^n$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 1 & -2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} n & -2-4-6-\cdots-2n \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & -n(n+1) \\ 0 & n \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}} 2n - n^2 - n = n - n^2$$

۱۰۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow A^3 = A^2 A = IA = A$$
$$A^4 = A^2 A^2 = I \times I = I$$
$$A^5 = A^4 A = IA = A$$

بنابراین به‌صورت استقرایی نتیجه می‌شود:

$$A^n = \begin{cases} A & \text{فرد } n \\ I & \text{زوج } n \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{200} = A + I + A + I + \cdots + I$$
$$= 100A + 100I = \begin{bmatrix} 0 & 100 \\ 100 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 100 \\ 100 & 100 \end{bmatrix}$$

۱۰۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt[5]{2} & 0 \\ \sqrt[5]{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[5]{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt[5]{2} & 0 \\ \sqrt[5]{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[5]{4} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \sqrt[5]{16} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[5]{16} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[5]{16} \end{bmatrix} = \sqrt[5]{16}\, I$$
$$A^{10} = (A^2)^5 = (\sqrt[5]{16}\, I)^5 = 16 I^5 = 16 I$$

پس مجموع درایه‌های قطر اصلی A^{10} برابر $16 + 16 + 16 = 48$ است.

۱۰۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

نکته: اگر $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$$

$$A^3 - 2A^2 + 5I = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌ها برابر ۲۱ است.

۱۰۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2 & 15 & 39 \\ 0 & 2^2 & 35 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 1^2 & 15 & 39 \\ 0 & 2^2 & 35 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^3 & \bigcirc & \bigcirc \\ 0 & 2^3 & \bigcirc \\ 0 & 0 & 3^3 \end{bmatrix}$$

پس ملاحظه می‌کنیم برای محاسبهٔ درایه‌های قطرهای اصلی نیازی به محاسبهٔ درایه‌های بالای قطر اصلی نیست و داریم:

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1^4 & \bigcirc & \bigcirc \\ 0 & 2^4 & \bigcirc \\ 0 & 0 & 3^4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{قطر اصلی}]{\text{مجموع درایه‌های}} 1^4 + 2^4 + 3^4 = 1 + 16 + 81 = 98$$

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix}a&x&y\\0&b&z\\0&0&c\end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^n=\begin{bmatrix}a^n&\bigcirc&\bigcirc\\0&b^n&\bigcirc\\0&0&c^n\end{bmatrix}$

۱۰۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A^2=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}$$

$$A^4 \text{ سطر اول} = (A^2 \text{ سطر اول})\times A^2$$

$$=[3\ \ -4\ \ 4]\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}=[1\ \ 0\ \ 0]$$

۱۰۶ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A^2=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9-6&-9+9-4&12-12+4\\6-6&-6+9-4&8-12+4\\-2&3-1&-4+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}$$

$$A^4=A^2A^2=\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-4&4\\0&-1&0\\-2&2&-3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9-8&-12+4+8&12-12\\0&1&0\\-6+6&8-2-6&-8+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

۱۰۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A^3 \text{ سطراول} = (A \text{ سطراول})\times A\times A=[2\ \ 1\ \ 5]\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&0&4\\1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&0&4\\1&0&2\end{bmatrix}$$

$$=[6\ \ 2\ \ 24]\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&0&4\\1&0&2\end{bmatrix}=[30\ \ 6\ \ 86]$$

۱۰۸ (۱) (۲) (۳) (۴)

$A=\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}$ و A^3 درایه سطر اول ماتریس $=(A\text{ سطراول})\times A\times A$

$$\Rightarrow A^3 \text{ درایه سطر اول ماتریس}=[3\ \ -3\ \ 4]\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$=[3\ \ -4\ \ 4]\begin{bmatrix}3&-3&4\\2&-3&4\\0&-1&1\end{bmatrix}=[1\ \ -1\ \ 0]$$

۱۰۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&4\\0&1&0\\4&0&4\end{bmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{bmatrix}4&0&4\\0&1&0\\4&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&0&8\\0&1&0\\8&0&8\end{bmatrix}$$

و با استدلال استقرایی نتیجه می‌شود:

$$A^{11}=\begin{bmatrix}2^{10}&0&2^{10}\\0&1&0\\2^{10}&0&2^{10}\end{bmatrix}$$

(مجموع درایه‌های قطر اصلی) − (مجموع درایه‌های A^{11})

$$=(4\times2^{10}+1)-(2\times2^{10}+1)=2\times2^{10}=2^{11}$$

۱۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=A$$

بنابراین $A^{2k+1}=A$ (k عدد طبیعی) و داریم:

$$A^{42}+A^{55}=A^{41}\times A+A^{2\times27+1}=A\times A+A=A^2+A$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

۱۱۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A^2=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&-1&2\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&-1&2\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

$$A^{100}=(A^3)^{33}\times A=I^{33}\times A=I\times A=A$$

۱۱۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$a_{ij}=|i-j|+j-i\Rightarrow A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix}0&2&4\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}0&2&4\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&4\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&4\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\bar{O}\Rightarrow A^k=\bar{O}\ (k\geq3)$$

$$B=A+A^2+A^3+\cdots+A^{1401}=A+A^2+\bar{O}+\cdots+\bar{O}$$

$$=A+A^2=\begin{bmatrix}0&2&4\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&8\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}8+2+2=12$$

۱۱۳

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\3&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\3&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&2\\6&0&0\\0&3&0\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}0&0&2\\6&0&0\\0&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\3&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{bmatrix}=6I$$

$$A^{40}=(A^3)^{13}A=(6I)^{13}A=6^{13}I^{13}A=6^{13}IA=6^{13}A$$

$$\frac{1}{36^6}A^{40}=\frac{6^{13}}{36^6}A=\frac{6^{13}}{6^{12}}A=6A=\begin{bmatrix}0&6&0\\0&0&12\\18&0&0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ مجموع درایه‌ها $=36$

۱۱۴

$$A^2=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&0\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-2&2\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}2&-2&2\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&0\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-4&4\\-2&2&-2\\2&-2&2\end{bmatrix}=2A^2$$

$$A^4=A^3\times A=2A^2\times A=2A^3=2\times 2A^2=4A^2$$

$$A^5=A^4\times A=4A^2\times A=4A^3=4\times 2A^2=8A^2$$

$\vdots$

$$A^n=2^{n-2}A^2\,(n\geq 2)\Rightarrow A^{100}=2^{98}A^2=2^kA^2\Rightarrow k=98$$

۱۱۵

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&4\\0&1&0\\4&0&4\end{bmatrix}$$

$\vdots$

$$A^{n+1}=\begin{bmatrix}2^n&0&2^n\\0&1&0\\2^n&0&2^n\end{bmatrix}(n\geq 1)$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}4\times 2^n+1=2^{n+2}+1$$

۱۱۶

$$A^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1+2&2&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\1+2+3&3&1\end{bmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\1+2+3&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\1+2+3+4&4&1\end{bmatrix}$$

و با استدلال استقرایی نتیجه می‌شود:

$$A^{49}=\begin{bmatrix}1&0&0\\49&1&0\\1+2+3+\cdots+49&49&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x=1+2+3+\cdots+49=\frac{49(49+1)}{2}=49\times 25=1225$$

۱۱۷

$$A^2=\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$$

$$A^4=A^3A=(-I)A=-A\,,\ A^5=A^4A=-A^2\,,$$

$$A^6=A^5A=(-A^2)A=-A^3=I$$

بنابراین:

$$A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6=A+A^2+A^3-A-A^2-A^3=O$$

و به طور تناوبی نتیجه می‌شود:

$$A^7+A^8+A^9+A^{10}+A^{11}+A^{12}$$
$$=A^{13}+A^{14}+A^{15}+A^{16}+A^{17}+A^{18}$$
$$=A^{19}+A^{20}+A^{21}+A^{22}+A^{23}+A^{24}=O$$

$$2I+A+A^2+\cdots+A^{24}+A^{25}=2I+O+A^{25}$$

$$=2I+(A^3)^8A=2I+(-I)^8A=2I-A$$

$$=2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\-1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع درایه‌ها}}2+1-1+1=3$$

۱۱۸

$$A^2=\begin{bmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&0&-16\\-6&1&-12\\4&0&9\end{bmatrix}$$

$$A^2+2A=\begin{bmatrix}-7&0&-16\\-6&1&-12\\4&0&9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&0&16\\6&-2&12\\-4&0&-10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=-I$$

$$(A^2+2A)^{10}=(-I)^{10}=I^{10}=I$$

۱۱۹

$$A^2=\begin{bmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-4&2\\2&-1&1\\-4&4&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&-8&4\\4&-3&2\\-8&8&-3\end{bmatrix}$$

$$A^2-2A=\begin{bmatrix}9&-8&4\\4&-3&2\\-8&8&-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10&-8&4\\4&-2&2\\-8&8&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=-I$$

$$(A^2-2A+2I)^6=(-I+2I)^6=I^6=I$$

۱۲۰

$$A^2=\begin{bmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&4&4\\-1&-3&-3\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&4&4\\-1&-3&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=-I$$

$$(A^3+3I)^4=(-I+3I)^4=(2I)^4=16I^4=16I$$

۱۲۱

$$A-kI=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\-1&0&-2\\1&1&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}k&0&0\\0&k&0\\0&0&k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k&-1&-2\\-1&-k&-2\\1&1&3-k\end{bmatrix}$$

$$(A-kI)^2=\begin{bmatrix}-k&-1&-2\\-1&-k&-2\\1&1&3-k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-k&-1&-2\\-1&-k&-2\\1&1&3-k\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}k^2-1&2k-2&4k-4\\2k-2&k^2-1&4k-4\\2-2k&2-2k&k^2-6k+5\end{bmatrix}$$

به ازای $k=1$ داریم $(A-I)^2=\bar{O}$، پس کم‌ترین مقدار $n+k$ برابر $3=1+2$ است.

۱۲۲

$$4A^2=3A\Rightarrow A^2=\frac{3}{4}A\Rightarrow A^2\times A=\frac{3}{4}A\times A\Rightarrow A^3=\frac{3}{4}A^2$$

$$=\frac{3}{4}(\frac{3}{4}A)=\frac{9}{16}A\ ,\ A^4=A^3A=(\frac{9}{16}A)A$$

$$=\frac{9}{16}A^2=\frac{9}{16}(\frac{3}{4}A)=\frac{27}{64}A$$

۱۲۳

$$A^2=A\Rightarrow 4A^2=4A\Rightarrow 4A^2-4A+I=I\Rightarrow(2A-I)^2=I$$

$$\Rightarrow 2^2(A-\frac{I}{2})^2=I\Rightarrow(A-\frac{I}{2})^2=\frac{I}{4}$$

$$\Rightarrow(A-\frac{I}{2})^6=(\frac{I}{4})^3=\frac{I^3}{64}=\frac{1}{64}I$$

۱۲۴

$$2I-A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

$$(2I-A)^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$$

$$(2I-A)^3=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\6&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}$$

و با استدلال استقرایی نتیجه می‌شود:

$$(2I-A)^{100}=\begin{bmatrix}1&0&0\\200&1&0\\100&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}}303$$

۱۲۵

$$ABC=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$(ABC)^2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$(ABC)^3=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

بنابراین کم‌ترین مقدار n برابر ۳ است.

۱۲۶

نکته: دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ برابر $|A|=ad-bc$ است.

$$\begin{vmatrix}a&-b\\2&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a&b\\6&-5\end{vmatrix}=32\Rightarrow 3a+2b-(-5a-6b)=32$$

$$\Rightarrow 8b+8a=32\Rightarrow a+b=4\ ,\ \begin{vmatrix}4a&b\\-4&1\end{vmatrix}=4a+4b$$

$$=4(a+b)=4\times4=16$$

۱۲۷

نکته: اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند آن‌گاه $|AB|=|A||B|$.

$$A=\begin{bmatrix}3&1\\1&1\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=3\times1-1\times1=2$$

$$B=\begin{bmatrix}4&2\\0&3\end{bmatrix}\Rightarrow|B|=4\times3-0\times2=12$$

$$\frac{|A^2+AB|}{|B^2+BA|}=\frac{|A(A+B)|}{|B(B+A)|}=\frac{|A||A+B|}{|B||B+A|}$$

$$=\frac{|A|}{|B|}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

۱۲۸

$$A^2=\begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I\Rightarrow A^3=A^2A=IA=A$$

$$A^4=(A^2)^2=I^2=I\ ,\ A^5=A^4A=IA=A\ ,\cdots,A^{2n-1}=A$$

$$B=A+A^3+A^5+\cdots+A^{2n-1}=\underbrace{A+A+A+\cdots+A}_{n\ \text{مرتبه}}=nA$$

$$\Rightarrow|B|=|nA|=n^2|A|=n^2\begin{vmatrix}2&3\\-1&-2\end{vmatrix}=n^2(-4+3)=-n^2$$

۱۲۹ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A+2B=\begin{bmatrix}5&-3\\0&-3\end{bmatrix},\ 2A-B=\begin{bmatrix}5&-11\\-5&4\end{bmatrix}$$

$$(A+2B)+2(2A-B)=\begin{bmatrix}5&-3\\0&-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10&-22\\-10&8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}15&-25\\-10&5\end{bmatrix}\Rightarrow 5A=\begin{bmatrix}15&-25\\-10&5\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}3&-5\\-2&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A|=3-10=-7$$

$$B=2A-\begin{bmatrix}5&-11\\-5&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&-10\\-4&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5&-11\\-5&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&-2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |B|=-2-1=-3\ ,\ |A|+|B|=-7-3=-10$$

۱۳۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\ ,\ |A|=3\Rightarrow ad-bc=3$$

$$A+I=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+1&b\\c&d+1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A+I|=(a+1)(d+1)-bc$$

$$A-I=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-1&b\\c&d-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A-I|=(a-1)(d-1)-bc$$

$$|A+I|+|A-I|=ad+a+d+1-bc+ad-a-d+1-bc$$

$$=2(ad-bc)+2\Rightarrow |A+I|+|A-I|=2\times 3+2=8$$

۱۳۱ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A^2=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+cd&bc+d^2\end{bmatrix}$$

(فرض) $|A|=\Delta\Rightarrow ad-bc=\Delta\Rightarrow ad=bc+\Delta$ (۱)

(فرض) $(a^2+bc)+(bc+d^2)=T\Rightarrow a^2+d^2+2bc=T$

$\Rightarrow a^2+d^2=T-2bc$ (۲)

مربع مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A = $(a+d)^2=a^2+d^2+2ad$

با قرار دادن (۱) و (۲) در تساوی فوق داریم:

$$=T-2bc+2(bc+\Delta)=T+2\Delta$$

۱۳۲ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$a_{ij}=\begin{cases}2i-j & i<j\\ i & i\geq j\end{cases}\Rightarrow A=[a_{ij}]=\begin{bmatrix}1&0\\2&2\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=2$$

$$b_{ij}=\begin{cases}i+2j & i\leq j\\ 2+j & i>j\end{cases}\Rightarrow B=[b_{ij}]=\begin{bmatrix}3&5\\3&6\end{bmatrix}\Rightarrow |B|=18-15=3$$

$$AX=B\Rightarrow |AX|=|B|\Rightarrow |A||X|=|B|\Rightarrow |X|=\frac{3}{2}$$

۱۳۳ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A=[a_{ij}]_{2\times 3}=[(-1)^i-j]_{2\times 3}=\begin{bmatrix}-2&-3&-4\\0&-1&-2\end{bmatrix}$$

$$B=[b_{ij}]_{3\times 2}=[(-1)^j+i]_{3\times 2}=\begin{bmatrix}0&2\\1&3\\2&4\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}-2&-3&-4\\0&-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\\1&3\\2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-11&-29\\-5&-11\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A\times B|=(-11)(-11)-(-5)(-29)=121-145=-24$$

۱۳۴ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$$

$$A^3=A^2A=(-I)A=-A$$

$$A^4=(A^2)^2=(-I)^2=I\ ,A^5=A^4A=IA=A\ ,$$

$$A+A^2+A^3+A^4=A-I-A+I=\bar{O}$$

توان‌های A با تناوب ۴ تکرار می‌شود. پس می‌توان نوشت:

$$B=\underbrace{(A+A^2+A^3+A^4)}_{\bar{O}}+\underbrace{(A^5+A^6+A^7+A^8)}_{\bar{O}}+\cdots$$

$$+\underbrace{(A^{2017}+A^{2018}+A^{2019}+A^{2020})}_{\bar{O}}+A^{2021}+A^{2022}=A-I$$

$$=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |B|=(-1)(-1)-(-1)(1)=1+1=2$$

۱۳۵ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$x^2-4x+1=0\Rightarrow \alpha+\beta=-\frac{-4}{1}=4\ ,\ \alpha\beta=\frac{1}{1}=1$$

$$|A|=\begin{vmatrix}\alpha+\beta&\alpha+\beta\\-\beta&\alpha\end{vmatrix}=\alpha(\alpha+\beta)+\beta(\alpha+\beta)$$

$$=(\alpha+\beta)^2=4^2=16$$

۱۳۶ (۱) (۲) (۳) (۴)

نکته: اگر A یک ماتریس ۲ × ۲ باشد آن‌گاه $|KA|=K^2|A|$ (K عدد حقیقی)

$$A^2=\begin{bmatrix}0&-a\\a&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-a\\a&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a^2&0\\0&-a^2\end{bmatrix}=-a^2I$$

$$A^{4n}=(A^2)^{2n}=(-a^2I)^{2n}=a^{4n}I^{2n}=a^{4n}I$$

$$A^{4n+1}=A^{4n}\times A=a^{4n}I\times A=a^{4n}A$$

$$A^{4n}+A^{4n+1}=a^{4n}I+a^{4n}A=a^{4n}(I+A)=a^{4n}$$

$$\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-a\\a&0\end{bmatrix}\right)=a^{4n}\begin{bmatrix}1&-a\\a&1\end{bmatrix}$$

$$|A^{4n}+A^{4n+1}|=a^{8n}\begin{vmatrix}1&-a\\a&1\end{vmatrix}=a^{8n}(1+a^2)$$

بنا به فرض دترمینان فوق برابر $a^{n+35}+a^{n+37}$ می‌باشد در نتیجه داریم:

$$a^{8n}(1+a^2)=a^{n+35}(1+a^2)\Rightarrow a^{8n}=a^{n+35}\Rightarrow 8n=n+35$$

$$\Rightarrow 7n=35\Rightarrow n=5$$

۱۳۷ (۱) (۲) (۳) (۴)

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1\\-2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1\\2&2\end{bmatrix}=-A$$

نکته: به طور کلی اگر $A^2=\lambda A$ آن‌گاه $A^n=\lambda^{n-1}A$.

$$A^{2022}=(-1)^{2021}A=-A$$

بنابه فرض $B=A+I$ در نتیجه:

$$A^{2022}+B=-A+A+I=I\Rightarrow |A^{2022}+B|=|I|=1$$

۱۳۸

$$2A = \begin{bmatrix}|A| & -2\\ 2 & |A|\end{bmatrix} \Rightarrow |2A| = \begin{vmatrix}|A| & -2\\ 2 & |A|\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 2^2|A| = |A|^2+4 \Rightarrow |A|^2-4|A|+4=0$$

$$\Rightarrow (|A|-2)^2=0 \Rightarrow |A|=2 \Rightarrow ||A|A| = |A|^2|A| = 2^2\times2=8$$

۱۳۹

$$2A+3I = \begin{bmatrix}9 & 4\\ -2 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}9 & 4\\ -2 & 3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)I = \bar{O}$$

$$\Rightarrow A^2-(3+0)A+(3\times0-2(-1))I = \bar{O}$$

$$\Rightarrow A^2-3A+2I=0 \Rightarrow A^2-3A=-2I$$

$$|A^2-3A| = |-2I| = (-2)^2 = 4$$

۱۴۰

$$C = A\times B = \begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ a & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & a\\ -1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}14 & 3a\\ 3a & a^2+5\end{bmatrix}$$

$$|C| = 14(a^2+5)-3a\times3a = 14a^2-9a^2+70 = 5a^2+70$$

پس به ازای هر a حقیقی، $|C|$ همواره مثبت است.

۱۴۱

نکته: اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه $|AB| = |BA| = |A||B|$

$$A\times B = \begin{bmatrix}7 & 8\\ 7 & 10\end{bmatrix} \Rightarrow |A\times B| = 7\times10-7\times8 = 70-56 = 14$$

چون دترمینان ماتریس $B\times A$ با دترمینان ماتریس $A\times B$ برابر است،

پس از بین گزینه‌ها تنها ماتریس $\begin{bmatrix}15 & 2\\ 8 & 2\end{bmatrix}$ برابر $B\times A$ می‌تواند باشد.

۱۴۲

$$AC = \begin{bmatrix}1 & a & 3\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ a & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a^2+10 & a+2\\ a+2 & 3\end{bmatrix}$$

(فرض) $ACB = 52I \Rightarrow |ACB| = 52^2 \Rightarrow |AC||B| = 52^2$

$$\Rightarrow ((3a^2+30)-(a+2)^2)\times104 = 52^2$$

$$\Rightarrow 3a^2+30-a^2-4a-4 = 26$$

$\Rightarrow 2a^2-4a=0 \Rightarrow a=0$ یا $a=2 \xrightarrow{\text{مجموع}} 2$

۱۴۳

یادآوری: اگر $a>0$ و مخالف ۱ باشد $(a\neq1)$ آن‌گاه برای هر x و y مثبت داریم:

الف) $\log_a x+\log_a y = \log_a xy$

ب) $\log_a x-\log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

$$A = \begin{bmatrix}\log5 & \log2\\ \log2 & \log5\end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (\log5)^2-(\log2)^2$$

$$= (\log5-\log2)(\log5+\log2)$$

$$\Rightarrow |A| = \log\frac{5}{2}\times\log10 = \log2.5\times1 = \log2.5$$

۱۴۴

$$\begin{vmatrix}10000^{\log x} & 100^{\log x}\\ 4 & 1\end{vmatrix} = -4 \Rightarrow 10000^{\log x}-4\times100^{\log x} = -4$$

$$\Rightarrow (100^2)^{\log x}-4\times100^{\log x}+4=0$$

$$\Rightarrow (100^{\log x})^2-4\times100^{\log x}+4=0$$

$$\xrightarrow{100^{\log x}=t} t^2-4t+4=0 \Rightarrow (t-2)^2=0$$

$$\Rightarrow t=2 \Rightarrow 100^{\log x}=2 \Rightarrow \log100^{\log x} = \log2$$

$$\Rightarrow \log x\times\log10^2 = \log2 \Rightarrow \log x = \frac{1}{2}\log2 = \log\sqrt{2} \Rightarrow x=\sqrt{2}$$

۱۴۵

نکته: ۱- اگر A یک ماتریس 2×2 یا 3×3 باشد، آن‌گاه $|A^n| = |A|^n$ (n عدد طبیعی است)

۲- اگر A یک ماتریس 2×2 و k یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه $|kA| = k^2|A|$

۳- اگر A یک ماتریس 3×3 و k یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه $|kA| = k^3|A|$

$$\left|\frac{1}{2}A^3\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^2|A^3| = \frac{1}{4}|A|^3 = \frac{1}{4}\times2^3 = \frac{8}{4} = 2$$

۱۴۶

با توجه نکته تست قبل (شماره ۳) داریم:

$$||A|A| = |A|^3|A| = |A|^4 = 4^4 = 256$$

۱۴۷

$$\begin{vmatrix}\tan\theta & \frac{1}{\cos\theta}\\ \tan\theta+\frac{1}{\cos\theta} & \tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\end{vmatrix}$$

$$= \tan\theta\left(\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)-\frac{1}{\cos\theta}\left(\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)$$

$$= \left(\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\tan\theta-\frac{1}{\cos\theta}\right) = \tan^2\theta-\frac{1}{\cos^2\theta}$$

با استفاده از اتحاد $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1+\tan^2\theta$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{vmatrix}\tan\theta & \frac{1}{\cos\theta}\\ \tan\theta+\frac{1}{\cos\theta} & \tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\end{vmatrix} = \tan^2\theta-(1+\tan^2\theta) = -1$$

۱۴۸

$$|A|^2-5|A|+6=0 \Rightarrow (|A|-2)(|A|-3)=0$$

$\Rightarrow |A|=2$ یا $|A|=3$

چون درایه‌های ماتریس A اعداد طبیعی هستند، پس درایه‌های A به‌صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 3\times1-1\times1 = 3-1 = 2$$

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 4-1 = 3$$

پس کم‌ترین مقدار مجموع درایه‌ها برابر ۶ $(2+2+1+1=6)$ $(3+1+1+1=6)$ است.